

十二重计数

概率的计算往往与组合计数密切相关, 且组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用。

十二重计数 (the twelvefold way), by G.- C.Rota (1932-1999).

• **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法?

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	?	?	?
相同	不同	?	?	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展：十二重计数

问题 1: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子: ?

问题 2: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$): ?

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	?		
相同	不同		?	
不同	相同		?	?
相同	相同			

进展：十二重计数

问题 1: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子: m^n

问题 2: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$):

• **解答 2:** 从 m 个箱子里挑 n 个箱子装球, 每个箱子装一个球: $\binom{m}{n}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	?	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展：十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球
($m \geq n$)

进展：十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球
($m \geq n$)

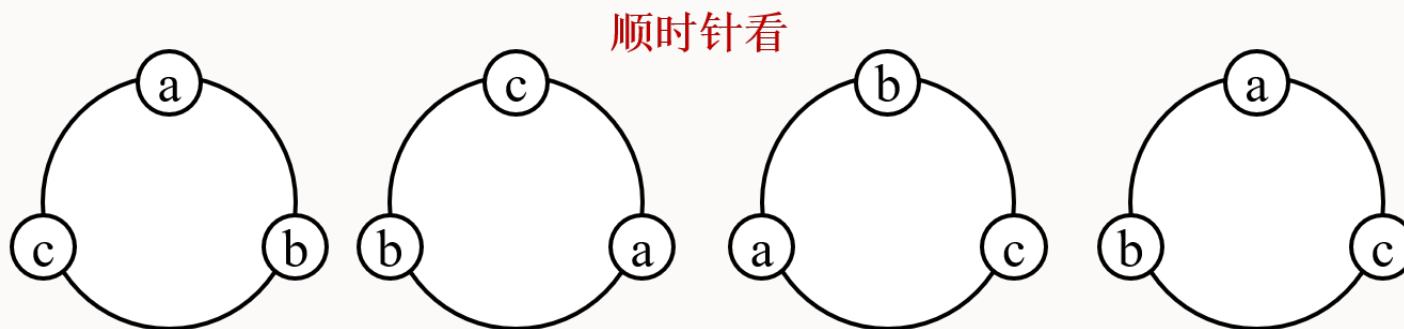
解析 3:

- 因为球和箱子都不相同, 所以放法依赖于球、球的数量、箱子
- 从 m 个箱子里挑 n 个箱子进行排列装球, 每个箱子装一个球; 其他的 $m - n$ 个箱子没有球所以不用区分
- 因此, 计数为:

$$C_m^n n! = (m)_n$$

环排列

- (直线) 排列: n 个不同的元素中无放回取出 r 个元素进行排列; 有 $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$ 种不同的排法
- 全排列: 若 $r = n$ 时; 有 $n!$ 种不同的排法
- 环排列: n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环



- 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列
- 不同的环排列的直线排列互不相同

环排列

定义 0.5 (环排列数) 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 有

$$\frac{(n)_r}{r}$$

种不同的排法, 称为 **环排列数**。这里, 记号 $(n)_r$ 表示 $C_n^r r!$

特别地, n 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$

例 0.24 将 n 对夫妻安排在一张圆桌, 任何夫妻两人需安排在一起, 有多少种不同的安排方法。

解法：例 0.24

问题：将 n 对夫妻安排在一张圆桌，任何夫妻两人需安排在一起，有多少种不同的安排方法？

- 基本事件的个数 $(2n - 1)!$
- 考虑“ n 对夫妻排在一起”的情况： $(n - 1)!$
- 考虑“每一对夫妻的座位顺序可以调换”的情况： 2^n
- 因此， $|A|_{\#} = 2^n(n - 1)!$

进展：十二重计数

问题 3: 将 n 只不同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至多 1 球
($m \geq n$)

解答 3:

- 从 m 个箱子里挑 n 个箱子进行排列装球, 每个箱子装一个球: $(m)_n$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展：十二重计数

问题 4: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

考虑一个简单的子问题:

例 0.25 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

解析：例 0.25

问题：将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

解答:

- 该题目中, 箱子是不同的, 球是相同的, 所以区别不同放法主要凭靠箱子中球的数量、箱子
- 设 3 个不同的箱子中依次有 x_1, x_2, x_3
- 条件: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
- 隔板法: 在 $10 + 3 - 1$ 个空 (需要考虑箱子的顺序) 中插入 $3 - 1$ 个隔板即可

整数的有序分解

问题 4: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 ($n \geq m$)

解析 4:

- **转化:** 第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\dots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

- n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的非负整数解

定理 0.1 (整数的有序分解: 非负解) 方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{N}, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 。

进展：十二重计数

问题 4: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子: 隔板法 $\binom{n+m-1}{m-1}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的有序分解: 例 0.26

问题 5: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 ($n \geq m$), 每个箱子至少有一个球.

例 0.26 将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子, 每个箱子至少有一个球, 有多少种不同的放法?

解析：例 0.26

问题：将 10 只相同的球放入 3 个不同的箱子，每个箱子至少有一个球，有多少种不同的放法？

解答：

- 该题目中，箱子是不同的，球是相同的，所以区别不同放法主要凭靠箱子中球的数量、箱子
- 设 3 个不同的箱子中依次有 x_1, x_2, x_3
- 条件： $x_1, x_2, x_3 \geq 1$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
- 转化： $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1 \geq 0$ 且 $y_1 + y_2 + y_3 = 7$
- 隔板法：在 $7 + 3 - 1$ 个空中插入 $3 - 1$ 个隔板即可
- 注意与例 0.25 的不同之处

整数的有序分解

问题 5: 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 ($n \geq m$), 每个箱子至少有一个球.

解析 5:

- **转化:** 第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\dots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为正整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

- n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的正整数解

定理 0.2 (正整数解) 方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{Z}^+, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n-1}{m-1}$ 。

进展：十二重计数

问题 5: 将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至少 1 球
 $(n \geq m)$: 隔板法 $\binom{n-1}{m-1}$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的有序分解: 例 0.27

例 0.27 思考题 to 作业

- 推论: 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数
- 问题: 在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?
- 证明: 根据隔板法的思路, 尝试形式化定理 0.1 和定理 0.2 的证明

多重组合

- 组合: n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素; 有 $\binom{n}{r}$ 种.
- 多重组合: 将 n 个不同的元素分成 k 组, 组内元素无顺序关系; 假设每组分别有 $r_1, r_2, \dots, r_k$ 个元素, 即 $n = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, 则有
$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \binom{n}{r_1} \binom{n - r_1}{r_2} \binom{n - r_1 - r_2}{r_3} \dots \binom{r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$
种不同的分组方法, 称为 $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$ 多重组合数.

Remark:

- 多组合数又称多项式系数, 因为

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n=r_1+r_2+\dots+r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$$

- 组合数本质上属于多重组合数.

多重排列

多重集: 假设集合中的元素可以重复, 且重复的元素之间不可分辨。

- 例如, 多重集 $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\}$.
- 多重集 A 有 k 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1, r_2, \dots, r_k$, 即 $n = r_1 + \dots + r_k$ 。将多重集 A 中的所有元素排列成一排, 然后
 - 从 n 个位置中选取 r_1 个位置放第一类元素
 - 再从剩下的从 $n - r_1$ 个位置中选取 r_2 个位置放第二类元素
 - ...
 - 最后 r_k 个位置放第 k 类元素

因此, A 有 $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$ 种不同的排列方法, 即多重组合数。

进展：十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

考虑一个简单的子问题:

例 0.28 集合 $\{1, 2, 3\}$ 不同的划分数.

解答：例 0.28

问题：集合 $\{1, 2, 3\}$ 不同的划分数.

解答：

- 分成 1 个集合 ($m = 1$): $\{1, 2, 3\}$, 1 种
- 分成 2 个集合 ($m = 2$): $\{A\} \oplus \{B, C\}$, 3 种
- 分成 3 个集合 ($m = 3$): $\{1\}, \{2\}, \{3\}$, 1 种

总共 5 种情况.

进展：十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

解答 6:

- 该题目中, 球是不同的, 箱子是相同的, 所以区别不同放法主要凭靠球的不同和数量
- 递归法

进展：十二重计数

问题 6: n 只不同的球放入 m 个完全相同的箱子, 且每个箱子至少 1 球, 有多少种不同的放法?

解答 6:

- 该题目中, 球是不同的, 箱子是相同的, 所以区别不同放法主要凭靠球的不同和数量
- 递归法

定义 0.6 (第二类 Stirling 数) 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集, 不同的划分数称为 第二类 Stirling 数, 记为 $S(n, m)$.

第二类 Stirling 数

$S(n, m)$: 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集.

- 记 $S(0, 0) = 1, S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1$
- 当 $m > n \geq 1$ 时, 有 $S(n, m) = 0$

定理 0.3 对 $n \geq m \geq 1$, 有

$$S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)$$

进而, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \\ \sum_{k=1}^n S(n, k) (x)_k = x^n, \quad (x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1) \end{array} \right.$$

第二类 Stirling 数: 证明思路

对 $n \geq m \geq 1$, 有 $S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)$.

- 如果指定元素 A 单独占用一个集合, 那么有子问题 $S(n-1, m-1)$.
- 如果指定元素 A 并未单独占用一个格子, 将其分到 m 个集合中 $\binom{m}{1}$, 那么有子问题 $S(n-1, m)$.

$S(1, 1) = 1$	0	0	...	0
$S(2, 1) = 1$	$S(2, 2)$	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0
$S(n-1, 1) = 1$	$S(n-1, 2)$	...	$S(n-1, m-1)$	0
$S(n, 1) = 1$	$S(n, 2)$	...	$S(n, m-1)$	$S(n, m)$

进展：十二重计数

问题 6: 将 n 只不同的球放入 m 个相同箱子

解答 6: 通过箱子中球、球的数量来识别箱子

- 每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$): $S(n, m)$
- 每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$): 有箱子有 1 个球, 有箱子没有球, 有球的箱子通过球来识别箱子: 1
- 无任何限制: 可以分解为 m 个子问题, $\sum_{k=1}^m S(n, k)$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^m S(n, k)$	1	$S(n, m)$
相同	相同	?	?	?

进展：十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子，有多少种不同的放法？

考虑一个简单的子问题：

例 0.29 考虑整数 7 的各种无序划分.

解答：例 0.29

问题：考虑整数 7 的各种无序划分.

解答：

$m = 1$	7	$p(7, 1) = 1$
$m = 2$	6 + 1, 5 + 2, 4 + 3	$p(7, 2) = 3$
$m = 3$	5 + 1 + 1, 4 + 2 + 1, 3 + 3 + 1, 3 + 2 + 2	$p(7, 3) = 4$
$m = 4$	4 + 1 + 1 + 1, 3 + 2 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1	$p(7, 4) = 3$
$m = 5$	3 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1	$p(7, 5) = 2$
$m = 6$	2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	$p(7, 6) = 1$
$m = 7$	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	$p(7, 7) = 1$

进展：十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子，有多少种不同的放法？

解答 7:

- 该题目中，球和箱子都是相同的，所以区别不同放法主要凭靠球的数量
- 无序拆分

整数的无序分拆

- 问题: 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和
- 转化: 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 等价于

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$$

- 形式化: 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 不同的划分数记为 $p(n, m)$
 - 记 $p(0, 0) = 1, p(n, 1) = 1, p(n, n) = 1$
 - 当 $m > n \geq 1$ 时, 有 $p(n, m) = 0$

定理 0.4 (递推关系) 对 $n \geq m \geq 1$, 有

$$\begin{cases} p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m) \\ p(n, m) = \sum_{i=1}^m p(n-m, i) \end{cases}$$

整数的无序分拆：证明思路

对 $n \geq m \geq 1$, 有 $p(n, m) = p(n - 1, m - 1) + p(n - m, m)$.

- 如果有单元素的划分, 那么有子问题 “ $n - 1$ 个球装 $m - 1$ 个箱子”:
- $p(n - 1, m - 1)$.
- 如果无单元素的划分, 默认所有箱子都有一个球了, 则所有划分子集内元素数量减 1, 那么有子问题 “把剩下的 $n - m$ 个球装 m 个箱子”:
- $p(n - m, m)$.

$p(1, 1) = 1$	0	0	...	0
$p(2, 1) = 1$	$p(2, 2)$	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0
$p(n - 1, 1) = 1$	$p(n - 1, 2)$	...	$p(n - 1, m - 1)$	0
$p(n, 1) = 1$	$p(n, 2)$	...	$p(n, m - 1)$	$p(n, m)$

整数的无序分拆

对正整数 $n \geq 1$ 和 $m \geq 1$, 有

$$\frac{1}{m!} \binom{n-1}{m-1} \leq p(n, m) \leq \frac{1}{m!} \binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}$$

给定 $m \geq 1$, 当 n 非常大或趋于无穷的极限中有

$$p(n, m) \approx \frac{n^{(m-1)}}{m!(m-1)!}$$

进展：十二重计数

问题 7: 将 n 只相同的球放入 m 个相同箱子

解答 7: 只能通过箱子中球的数量来识别箱子

- 每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$): $p(n, m)$
- 每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$): 有箱子有 1 个球, 有箱子没有球, 通过有无球来识别箱子: 1
- 无任何限制: 可以分解为 m 个子问题, $\sum_{k=1}^m p(n, k)$

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n, m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^m S(n, k)$	1	$S(n, m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^m p(n, k)$	1	$p(n, m)$

总结: 十二重计数

- 不同球 - 不同箱子: 球、球数量、箱子——排列
- 相同球 - 不同箱子: 球数量、箱子——组合
- 不同球 - 相同箱子: 球、球数量——第二类 Stirling 数 S
- 相同球 - 相同箱子: 球数量——无序分解 p

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 ($m \geq n$)	每个箱子至少 1 球 ($n \geq m$)
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n, m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^m S(n, k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n, m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^m p(n, k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n, m)$