# Distribution Functions, Probability Density Functions, and Statistical Quantity

October 10, 2026

# 提纲: 连续型随机变量

- 分布函数
- 密度函数
- 数字特征
  - 期望
  - 函数期望 (Jensen 不等式)
  - 方差
- 常见的连续型随机变量和分布
  - 均匀分布: 分布函数、密度函数、数字特征
  - 指数分布: 分布函数、密度函数、无记忆性、数字特征
  - 正态分布: 分布函数、密度函数、数字特征、标准正态分布

# 随机变量的分布函数

**定义 0.27** 给定任意随机变量 $X$ 和实数 $x$ , 函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

称为随机变量 $X$ 的分布函数, 分布函数的本质是概率.

- 分布函数 $F(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的普通函数, 将概率与普通函数联系起来, 有利于利用数学分析的知识来研究随机变量;
- 分布函数不限制随机变量的类型, 无论是离散型随机变量还是非离散型随机变量, 都有各自的分布函数;
- 对任意实数 $x_1 < x_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

# 分布函数的性质

分布函数 $F(x)$ 具有如下性质:

- 单调性: 若 $x_1 < x_2$, 则 $F(x_1) < F(x_2)$
- 规范性: $F(x) \in [0,1]$ 且 $F(-\infty) = 0$ , $F(+\infty) = 1$
- 右连续性: $F(x+0) = F(x)$

任何分布函数都需要满足上述三性质, 满足上述三性质的函数必是某随机变量的分布函数. 分布函数可由上述三性质完全刻画.

# 概率的计算

有了分布函数 $F(x)$ , 就很容易计算随机变量 $X$ 的概率, 如:

$$
\begin{aligned}
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X < a) &= F(a-0) = \lim_{x \to a} F(x) \\
P(X = a) &= F(a) - F(a-0) \\
P(X \geq a) &= 1 - F(a-0) \\
P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a-0)
\end{aligned}
$$

# 分布函数: 例 0.80

对离散型随机变量 $X$ , 设其分布列为 $p_k = P(X = x_k)(k = 1, 2, \dots)$ , 可得 $X$ 的分布函数为:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k:x_k \leq x} p_k$$

**例 0.80** 随机变量 $X$ 的分布列如下, 求 $X$ 的分布函数.

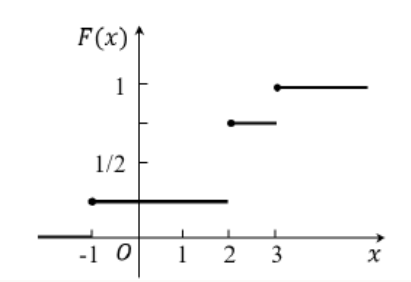
| $X$ | -1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

# 解答: 例 0.80

题目: 随机变量 $X$ 的分布列为 $P(X=-1)=P(X=3)=1/4$ 和 $P(X=2)=1/2$, 求 $X$ 的分布函数

解答:

- 对离散型随机变量 $X$ , 设其分布列为 $p_k=P(X=x_k)(k=1,2,\dots)$ , $X$ 的分布函数为 $F(x)=P(X\le x)=\sum_{k:x_k\le x}p_k$.
- 当 $x<-1$ , 有 $F(x)=P(X\le x)=P(\emptyset)=0$; 当 $-1\le x<2$ , 有 $F(x)=P(X\le x)=P(X=-1)=\frac{1}{4}$; 当 $2\le x<3$ , 有 $F(x)=P(X\le x)=P(X=-1)+P(X=2)=\frac{3}{4}$; 当 $x\ge 3$ , 有 $F(x)=P(X\le x)=P(X=-1)+P(X=2)+P(X=3)=1$.
- 如下图所示, 分布函数 $F(x)$ 是一条阶梯形的曲线, 在 $x=-1,2,3$ 处有跳跃点.



# 分布函数: 例 0.81

**例 0.81** 随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$, 求 $P(X \leq 1)$ .

# 解答: 例 0.81

题目: 随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x$,$x \in (-\infty, +\infty)$, 求 $P(X \leq 1)$.

解答:

- 直接代入定义: $F(1) = A + B\arctan 1 = A + B\pi/4$ .
- 由分布函数的性质可知, $F(-\infty) = 0$ 和 $F(+\infty) = 1$ .
- 求解下列式子:

$$0 = F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} A + B\arctan x = A - \pi B/2$$

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} A + B\arctan x = A + \pi B/2$$

可得 $A = 1/2$ 和 $B = 1/\pi$, 从而得到 $P(X \leq 1) = 3/4$ .

# 回顾: 随机变量

根据取值类型, 可以将随机变量进行分类:

- 离散型随机变量: $X$ 的取值是有限的、无限可列的
  - 抛一枚骰子的点数: $1, 2, \ldots, 6$ ——有限的

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|

  - 国家一年出生的婴儿数: $1, 2, \ldots, n$ ——有限的或者无限可列的

| $X$ | 1 | 2 | $\ldots$ | $n$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|

- 非离散型随机变量: $X$ 的取值是无限不可列的

# 连续型随机变量 – 概率密度函数

**定义 0.28** 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$ , 如果存在可积函数 $f(x)$ , 使得对任意实数 $x$ 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

成立, 则称 $X$ 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 为随机变量 $X$ 的概率密度函数, 简称密度函数.

Remarks:

- 随机变量的取值 $x$ 的取值为连续型, 通常整个区间 $[a, b]$ 或 $(a, \infty)$ , 例如火车的到站时间、或一盏灯泡的寿命等.
- 随机变量的分布函数由一元积分表示 **why ?**

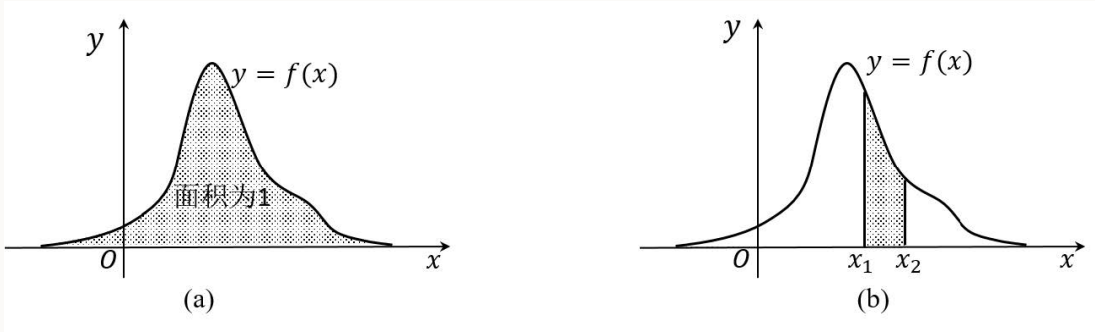
# 密度函数的几何解释 for 分布函数由一元积分表示

密度函数 $f(x)$ 满足非负性 $f(x) \geq 0$ 和规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}t = 1$.

- 根据规范性可知曲线 $y = f(x)$ 与 $x$ 轴所围成的面积为 1. 对任意 $x_1 \leq x_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}t$$

- <u>几何解释</u>: $X$ 落入区间 $(x_1, x_2]$ 的概率等于 $x$ 轴, $x = x_1$ , $x = x_2$ 和 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. $f(x)$ 指向 $x$ 点处的可能性.



# 密度函数: 例 0.82

**例 0.82** 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 且 $f(x) = f(-x)$. 令 $F(x)$ 为 $X$ 的分布函数, 则对于任意实数 $a$, 有

- (a) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- (b) $F(-a) = 1/2 - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- (c) $F(-a) = F(a)$
- (d) $F(-a) = 2F(a) - 1$

# 解答: 例 0.82

题目: 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 且 $f(x) = f(-x)$. 令 $F(x)$ 为 $X$ 的分布函数, 则对于任意实数 $a$, 有

- (a) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- (b) $F(-a) = 1/2 - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- (c) $F(-a) = F(a)$
- (d) $F(-a) = sF(a) - 1$

解答: 这里的核心在于计算 $F(-a)$. 根据定义, 有

$$\begin{aligned} F(-a) &= \int_{-\infty}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{+\infty}^{a} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{a}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y \quad (let\ y = -x) \end{aligned}$$

所以 $F(-a) + F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 进而

$$F(-a) = 1 - F(a) \quad \text{或者} \quad = 1/2 - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

# 密度函数: 例 0.83

**例 0.83** 设连续随机变量 $X$ 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ a - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$ .

# 解答: 例 0.83

题目: 如上所述.

解答:

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\int_1^2 (a-t)\,\mathrm{d}t=a-1$$

  从而求解出 $a=2$, 于是得到具体的密度函数 $f(x)$.
- 当 $x\leq 0$ 时, 有 $F(x)=0$ ; 当 $0<x\leq 1$ 时, 有

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=x^2/2;$$

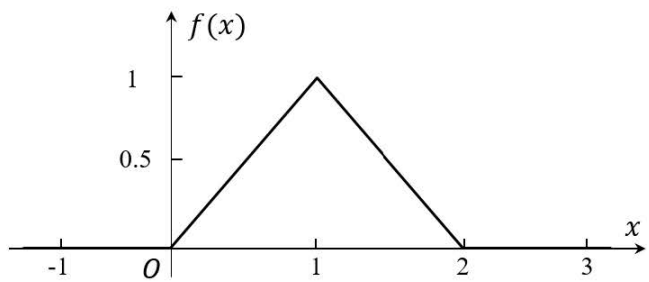
  当 $1<x\leq 2$ 时, 有

$$F(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=1/2+\int_1^x (2-t)dt=-x^2/2+2x-1;$$

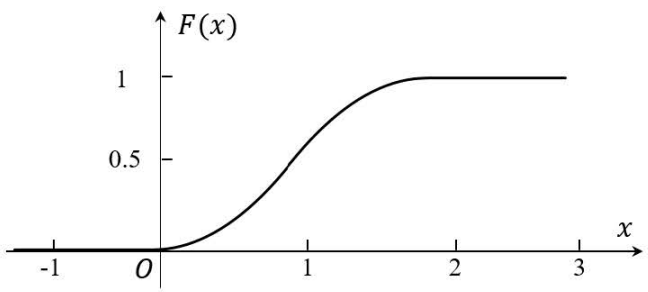
当 $x \geq 2$ 时, 有 $F(x) = 1$. 综合可得

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2/2 & 0 < x \leq 1, \\ -x^2/2 + 2x - 1 & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

随机变量 $X$ 的密度函数和分布函数如下图所示.



(a) 概率密度函数



(b) 分布函数

# 密度函数: 例 0.84

**例 0.84** 对连续随机变量 $X$ , 当 $x \in (0,3)$ 时密度函数 $f(x) = cx^2$, 在其它点的密度函数 $f(x) = 0$. 设随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & X \in (1,2) \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

求概率 $P(Y \geq X)$ .

# 解答: 例 0.84

题目: 如上所述.

解答:

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 9c$, 由此可得 $c = 1/9$.
- 用 $F_Y(y)$ 表示随机变量 $Y$ 的分布函数. 当 $y < 1$ 时, 有 $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$; 当 $y \ge 2$ 时, 有 $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$; 当 $1 \le y < 2$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(Y = 1) + P(1 < Y \le y) \\
&= P(X \ge 2) + P(1 < X \le y) = \int_2^3 t^2/9\,\mathrm{d}t + \int_1^y t^2/9\,\mathrm{d}t = (18 + y^3)/27
\end{aligned}
$$

由此可得随机变量 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1, \\ (18 + y^3)/27 & y \in [1, 2), \\ 1 & y \geq 2. \end{cases}$$

可以观察到随机变量 $Y$ 不是连续型随机变量, 也不是离散型随机变量. 最后计算概率

$$P(X \leq Y) = P(X < 2) = \int_0^2 t^2/9dt = 8/27$$

# 概率密度函数相关定理

**定理 0.9** 对连续随机变量 $X$, 其分布函数 $F(x)$ 在整个实数域上连续; 若 $f(x)$ 在 $x$ 点连续, 则 $F(x)$ 在 $x$ 点可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

分布函数的导数是概率密度函数, 概率密度函数的积分是分布函数?

**定理 0.10** 对连续型随机变量 $X$ 和常数 $x$ , 有 $P(X = x) = 0$.

Remarks:

- 事件是孤点的: 一个事件的概率为 0, 不能推出该事件是不可能事件; 一个事件的概率为 1, 也不能推出该事件是必然事件.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$.
- 注意: 概率密度函数不是概率, 即 $P(X = x) = 0 \neq f(x)$.

# 概率与密度函数的关系

若 $f(x)$ 在点 $x$ 连续, 根据连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x-\Delta x\le X\le x+\Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t}{2\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x f(\xi)}{2\Delta x}\\ &= f(\xi)\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(x-\Delta x, x+\Delta x)$, 由此可得

$$P(x-\Delta x\le X\le x+\Delta x)\approx 2f(x)\Delta x$$

概率密度 $f(x)$ 越大, 则 $X$ 在 $x$ 附近取值的概率越大.

# 统计量一: 期望

**定义 0.29** 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 称 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$ 为随机变量 $X$ 的期望, 记为 $\mathbb{E}(X)$ , 即

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$$

**例 0.85** 物理学中用到的柯西分布为: 随机变量 $X$ 的密度函数是

$$f(x)=1/\pi(1+x^2)\quad(x\in\mathbb{R})\,,$$

求期望 $\mathbb{E}(X)$ .

# 解答: 例 0.85

题目: 物理学中用到的柯西分布为: 随机变量 $X$ 的密度函数是 $f(x) = 1/\pi(1+x^2)(x \in \mathbb{R})$, 求期望 $\mathbb{E}(X)$ .

解答:

- 根据随机变量 $X$ 的期望 $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = +\infty$$

- 由上可知柯西分布的期望不存在.

# 连续期望的性质

- 对任意常数 $a, b$ 和连续随机变量 $X$, 有 $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- 对常数 $c_1, \ldots, c_n$ 和连续函数 $g_1(x), \ldots, g_n(x)$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left(g_i(X)\right)$$

- 对连续随机变量 $X$ 和凸函数 $f(x)$, 有 $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$.
- 对连续随机变量 $X$ 和凹函数 $f(x)$, 有 $f(\mathbb{E}(X)) \geq \mathbb{E}(f(X))$.

# 非负随机变量期望的等价定义

**定义 0.30** 对非负随机变量 $X$ , 有

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$$

证明: 概率 = 积分, 积分换序

推论: 对非负随机变量 $g(X)$, 有 $\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^{+\infty} P(g(X) > t)\,\mathrm{d}t$.

# 非负随机变量期望的等价定义

<u>求证</u>: $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$ for $X \geq 0$

<u>证明</u>: It is observed that

$$x = \int_0^x 1\,\mathrm{d}s = \int_0^x \mathbb{I}(s \leq x)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq x)\,\mathrm{d}s\ .$$

Thus, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq X)\,\mathrm{d}s\right] \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq x)\,\mathrm{d}s\right] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}(x \geq s) f(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{s} \mathbb{I}(x \geq s) f(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}s + \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} \mathbb{I}(x \geq s) f(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} P(X \geq s)\,\mathrm{d}s\ .
\end{aligned}$$

# 统计量二: 函数期望

**定理 0.11** 设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$、且 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ 绝对可积, 则随机变量 $Y = g(X)$ 的期望

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

# 函数期望: 例 0.86

**例 0.86** 古人运送粮草, 如果早到每天需要的存储费用 $c$ 元, 如果晚到每天需要的延期费用为 $C$ 元. 粮草在运送过程中存在天气、路况等不确定因素, 因此运送需要的天数是随机的, 概率密度函数为 $f(x)$, 问什么时候出发才能使费用的期望值最小?

# 解答: 例 0.86

解答:

- 先列出所需费用的分布函数, 再求期望的表达式及其最小值.
- 用随机变量 $X$ 表示实际的运送天数, 分布函数为 $F(x)$. 不妨假设提前了 $t$ 天出发 ($t$ 也表示运粮约定时间) , 那么所需费用为

$$\ell_t(X) = \begin{cases} c(t-X) & X \le t, \\ C(X-t) & X > t. \end{cases}$$

- 因此可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\ell_t(X)\right] &= \int_0^{+\infty} \ell_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t c(t-x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^{+\infty} C(x-t) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= ctF(t) - c\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + C\int_t^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x - Ct(1-F(t)) \end{aligned}$$

- 该函数是一个关于运粮约定时间或者提前出发事件 $t$ 的函数

- 对上式中的 $t$ 求导、并令导数为零可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[\ell_t(X)\right] = cF(t) - C(1 - F(t)) = (c + C)F(t) - C$$

求解可得期望最小的天数 $t^*$ 满足

$$F(t^*) = C/(c + C)$$

# 统计量三: 方差

**定义 0.31** 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 称

$$\mathbb{VAR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

等价地

$$\mathbb{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

为随机变量 $X$ 的方差.

连续函数方差的性质: (证明留作作业)

- 对任意常数 $a, b$ 和连续随机变量 $X$, 有 $\mathbb{VAR}(aX + b) = a^2\mathrm{VAR}(X)$
- 对于常数 $c$, 有 $\mathbb{VAR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \leq (X - c)^2$
- 对于 $X \in [a, b]$ , 有 $\mathbb{VAR}(X) \leq (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$

# 方差: 例 0.87

**例 0.87** 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $X$ 的方差 $\mathbb{VAR}(X)$ 和 $-2X+3$ 的方差 $\mathbb{VAR}(-2X+3)$ .

# 解答: 例 0.87

题目: 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & 1<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $X$ 的方差 $\mathbb{VAR}(X)$ 和 $-2X+3$ 的方差 $\mathbb{VAR}(-2X+3)$ .

解答:

- 根据方差的定义可知, 因为 $\mathbb{VAR}(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$, 且

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x\cdot\frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x=\frac{14}{9}$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x^2\cdot\frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$$

  由此可得 $\mathbb{VAR}(X)=\frac{13}{162}$.
- 根据方差的性质得, $\mathbb{VAR}(-2X+3)=4\cdot\mathbb{VAR}(X)=\frac{26}{81}$

# 本节内容：几种常见的连续型随机变量和分布

| 类型 | 知识点 |
|---|---|
| 均匀分布 | 分布函数、密度函数、数字特征 |
| 指数分布 | 分布函数、密度函数、无记忆性、数字特征 |
| 正态分布 | 分布函数、密度函数、数字特征、标准正态分布 |
| 相关的经典例题 | |

# 均匀分布

**定义 0.32** 若连续随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

称 $X$ 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, 记为 $X\sim U(a,b)$.

若随机变量 $X\sim U(a,b)$, 则 $X$ 落入内任一子区间 $[x,x+\Delta]$ 的概率

$$P(x\le X\le x+\Delta)=\int_x^{x+\Delta}\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\frac{\Delta}{b-a}$$

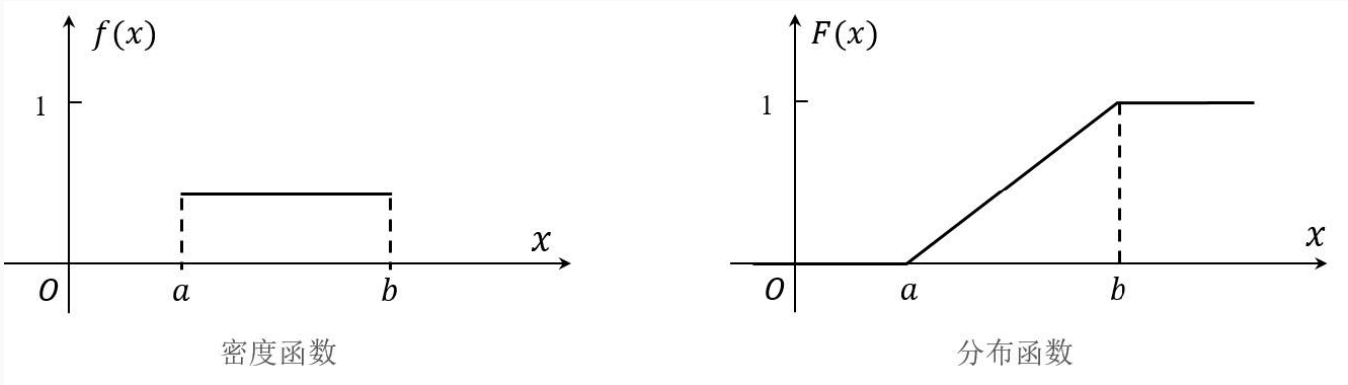
<u>几何解释</u>: 若 $X$ 落入 $[a,b]$ 内任一子区间的概率与该区间的长度成正比, 与位置无关.

# 均匀分布的分布函数和数字特征

若随机变量 $X \sim U(a,b)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

- 密度函数和分布函数的示意图




- 若随机变量 $X \sim U(a,b)$, 则有 $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ 和 $\mathbb{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

# 均匀分布: 例 0.88

**例 0.88** 已知随机变量 $X \sim U(a,b)$, 则 $a < c < d < b$. 求 $P(X \leq c \mid X \leq d)$.

# 解答: 例 0.88

题目: 已知随机变量 $X \sim U(a,b)$, 则 $a < c < d < b$, 求 $P(X \leq c|X \leq d)$.

解答:

- 根据条件概率的定义及均匀分布的密度函数可知,

$$P(X \leq c \mid X \leq d) = \frac{P(\{X \leq d\} \cap \{X \leq c\})}{P(X \leq d)} = \frac{P(X \leq c)}{P(X \leq d)} = \frac{c-a}{d-a}$$

  即在 $X \leq d$ 的条件下, 随机变量 $X \sim U(a,d)$.

# 均匀分布: 例 0.89

**例 0.89** 设随机变量 $Y \sim U(-3,6)$, 试求方程 $4x^2+4Yx+Y+2=0$ 有实根的概率.

# 解答: 例 0.89

题目: 设随机变量 $Y \sim U(-3,6)$, 试求方程 $4x^2+4Yx+Y+2=0$ 有实根的概率.

解答:

- 根据均匀分布的密度函数和一元二次方程有实数根的条件可知, 随机变量 $Y$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/9, & x\in[-3,6]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设事件 $A$ 表示方差有实根, 于是有,

$$\begin{aligned}P(A)&=P\left[(4Y)^2-4\times4\times(Y+2)\geq0\right]=P\left[(Y+1)(\xi-2)\geq0\right]\\&=P(\{Y\geq-1\}\cap\{Y\geq2\}\geq0)+P(\{Y\leq-1\}\cap\{Y\leq2\}\geq0)\\&=P(Y\leq-1)+P(Y\geq2)=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}\,\mathrm{d}t+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

# 指数分布

指数分布常用于电话的通话时间和银行的服务等待时间, 也可以用于描述动物和电子元件的寿命, 在可靠性理论和排队论中具有广泛的应用.

**定义 0.33** 给定常数 $\lambda > 0$, 若连续随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

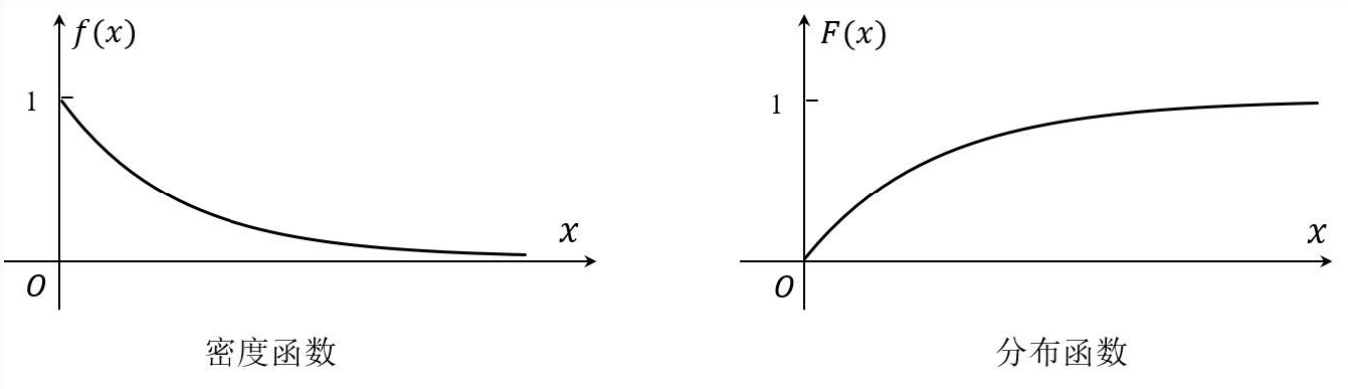
称 $X$ 服从参数 $\lambda$ 的指数分布, 记为 $X \sim e(\lambda)$.

# 指数分布的分布函数

若随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 的密度函数和分布函数的示意图为:



# 指数分布: 例 0.90

**例 0.90** 设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布, 求证: $Y = 1 - \exp(-2X)$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

# 解答: 例 0.90

题目: 设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布, 求证: $Y = 1 - \exp(-2X)$ 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布.

解答:

- 本题的关键是求解 $X$ 和 $Y$ 之间的双射关系
- $X$ 的分布函数 $F(x) = 1 - \exp(-2X)$ for $x > 0$. 而 $Y = 1 - \exp(-2X)$ 是单调增函数, 所以有反函数 $X = -\ln(1 - Y)/2$. 令 $G(Y)$ 为随机变量 $Y$ 的分布函数, 则

$$G(Y) = P(Y \leq y) = P\{1 - \exp(-2X) \leq y\} = \begin{cases} 0 & ,y \leq 0 \\ P\left\{X \leq -\ln(1-y)/2\right\} & ,0 < y < 1 \\ 1 & ,y \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \ ,y \leq 0 \\ y \ ,0 < y < 1 \\ 1 \ ,y \geq 1 \end{cases}$$

# 指数分布: 例 0.91

**例 0.91** 证明: 若随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立的、且分别服从参数为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的指数分布, 则有

$$X = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim e(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

# 解答: 例 0.91

题目: 证明: 若随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立的、且分别服从参数为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的指数分布, 则有

$$X = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim e(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

解答:

- 随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立的可以理解为随机变量取不同值的随机事件相互独立.
- 随机变量 $X$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq x) = 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i x) = 1 - \exp\left(-x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \end{aligned}$$

由此证明完毕.

# 指数分布的期望、方差、无记忆性

若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad 和 \quad \mathbb{VAR}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**定理 0.12** 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则对任意 $s > 0, t > 0$ , 有

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$$

<u>Remarks:</u>

- 指数分布是唯一具有无记忆性的连续型随机变量
- 联想到: 离散型随机变量 – 几何分布也是无记忆性的

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

# 正态分布

正态分布是概率统计中最重要的一种分布, 最早由法国数学家棣莫弗在 1730s 提出, 用于近似抛硬币试验中随机事件的概率.

高斯在 1800s 首次将正态分布应用于预测天文学中星体的位置, 由此才展示出正态分布的应用价值, 正态分布因此被称为高斯分布.

正态分布的重要性主要体现在以下三个方面:

- 现实生活中很多随机现象可用正态分布进行描述, 如人的身高等;
- 很多分布可以通过正态分布来进行近似计算;
- 数理统计中常用的统计分布都是由正态分布导出的, 如 $\chi^2$ 分布、$t-$ 分布和 $F-$ 分布.

# 正态分布的定义

**定义 0.34** 给定 $u \in (-\infty, +\infty)$ 和 $\sigma > 0$, 若连续随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

称 $X$ 服从参数 $\mu, \sigma^2$ 的正态分布, 记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

特别地, 若 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$ , 称 $\mathcal{N}(0, 1)$ 为标准正态分布, 密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

# 正态分布的期望和方差

若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则有

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{和} \quad \mathbb{VAR}(X) = \sigma^2$$

若 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则有

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \quad \text{和} \quad \mathbb{VAR}(Y) = 1$$

<u>标准正态分布与一般分布的相互转换:</u>

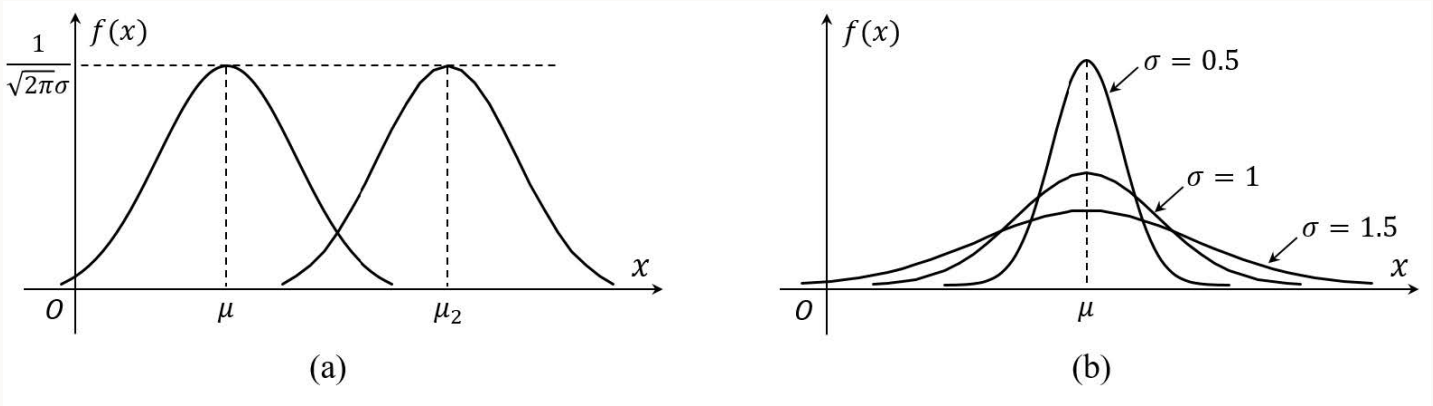
若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则有

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

若 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则有

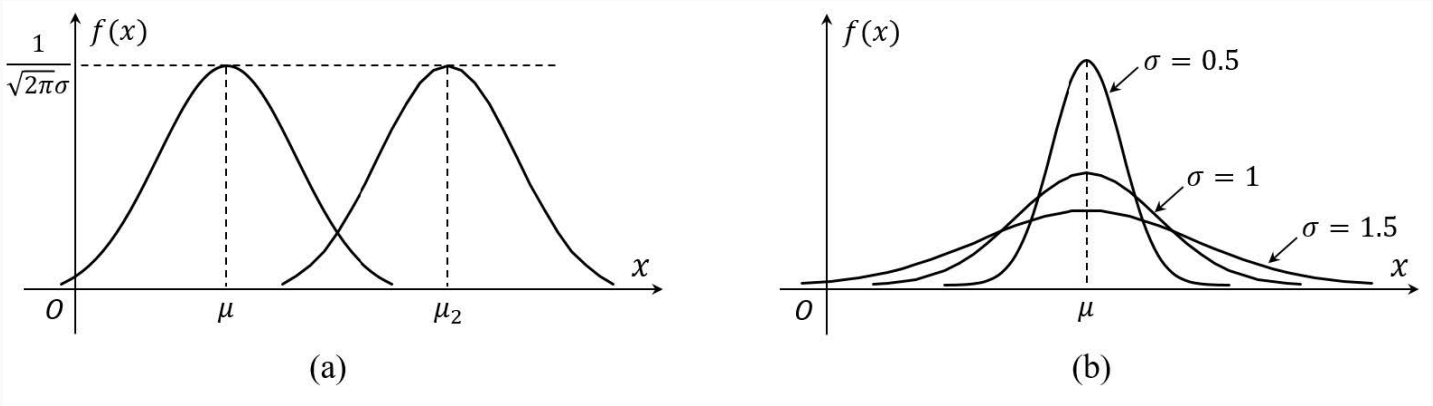
$$X = \sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$$

# 正态分布的性质




- 如图 (a) 所示, 曲线 $f(x)$ 关于直线 $x=\mu$ 对称, 即 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$; 当 $x=\mu$ 时函数 $f(x)$ 取最大值 $f(\mu)=1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$;
- 如图 (a) 所示, 根据 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 可得曲线 $f(x)$ 的渐近线为 $y=0$; 根据正态分布密度函数的二阶导数 $f''(x)=0$, 可得其拐点为 $x=\mu\pm\sigma$;

# 正态分布的性质




- 如图 (a) 所示, 固定标准差 $\sigma$ 而改变期望 $\mu$ 的值, 曲线 $f(x)$ 形状不变, 仅沿 $x$ 轴左右平行移动;
- 如图 (b) 所示, 当 $\mu$ 固定改变 $\sigma$ 的值, 根据 $f(x)$ 最大值 $f(\mu) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$ 可知: 当 $\sigma$ 越小, 图形越陡, $X$ 落入 $\mu$ 附近概率越大; 反之 $\sigma$ 越大, 图形越平坦, $X$ 落入 $\mu$ 附近的概率越小.

# 正态分布: 例 0.92

**例 0.92** 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5, 求 $\mu$.

# 解答: 例 0.92

题目: 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5, 求 $\mu$.

解答:

- 二次方程无实根, 则 $\Delta = 4^2 - 4X < 0$, 即 $X > 4$.
- 则 $P(X > 4) = 0.5$.
- 根据正态分布的对称性, 则 $\mu = 4$.

# 正态分布的估计

**定理 0.13** 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\begin{cases} P(X \geq \epsilon) \leq \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\epsilon^2/2} \\ P(|X| \geq \epsilon) \leq \min\left(1, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\epsilon}\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon^2}{2}}\right) \end{cases}$$

在上面的定理中, 第一个不等式具有广泛的应用, 在 $\epsilon \in (0,1)$ 时对真实的概率有更好的估计; 第二个不等式被称为 Mill 不等式, 在 $\epsilon \in (1,+\infty)$ 时对真实的概率有更好的估计.

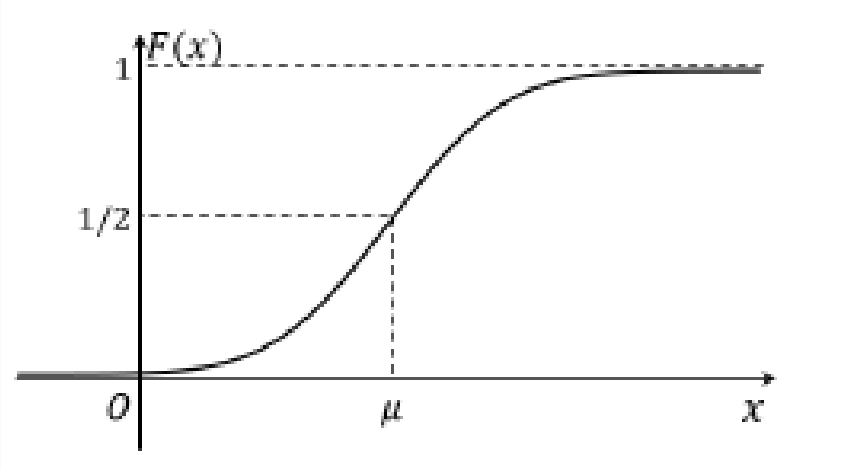
这两个不等式都可以通过定义的放缩求得. (该证明作为作业)

# 正态分布的分布函数

若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} \, \mathrm{d}t$$

该分布函数没有显示的表达式, 只能求数值解.



# 正态分布的分布函数

若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} \, \mathrm{d}t$$

为了便于研究正态分布函数, 可将一般正态分布转化为标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$,

- 设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 且其分布函数为:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

- 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则 $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$ 满足一般正态分布

下表给出标准正态分布 $\Phi(x)$ 的函数表, 在计算具体概率时可供查询.

# 附: 标准正态分布表 P91

| $x$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

# 标准正态分布函数的性质

- 根据对称性, 有 $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$;
- 若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则对任意实数 $a<b$ 有

$$P(X<a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$P(X>b)=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$$

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

- 形成由 $\mu$ 和 $k\sigma$ 划分的概率空间

# 标准正态分布函数的性质

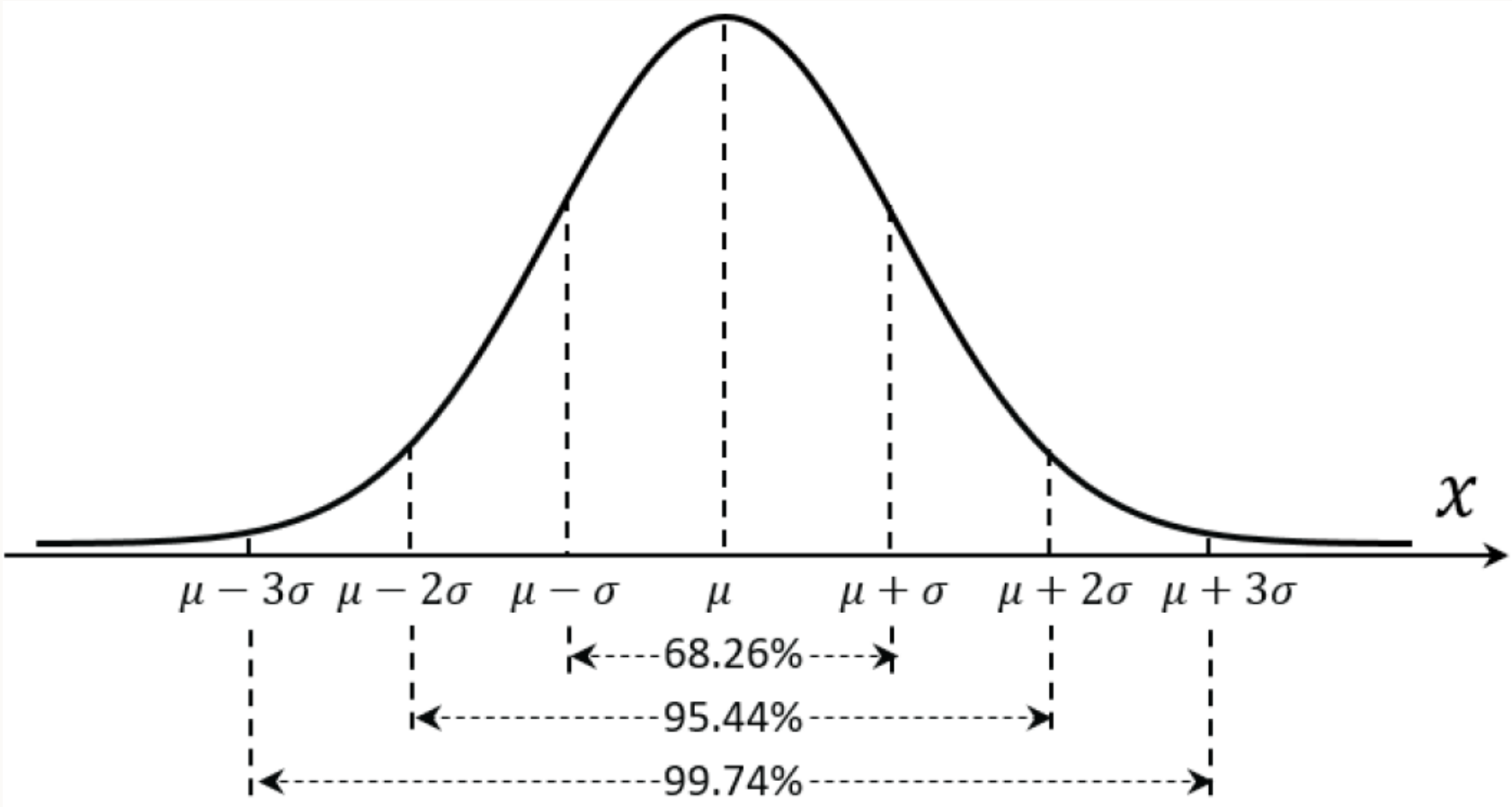
- 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则对任意实数 $k > 0$ 有

$$P(|x-\mu| < k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1,$$

特别的, 当 $k = 1, 2, 3$ 时, 通过查标准正态分布的函数表可知:

$$P(|x-\mu| < \sigma) = 0.6826$$
$$P(|x-\mu| < 2\sigma) = 0.9544$$
$$P(|x-\mu| < 3\sigma) = 0.9974$$

随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的取值落在 $[\mu 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 之外的概率不超过千分之三, 即 $X$ 的取值几乎总在 $[\mu 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 之内, 这就是人们所说的 $3\sigma$ 原则, 在实际的统计推断, 特别是产品质量检测中具有重要的应用.


$x$
$\mu - 3\sigma$
$\mu - 2\sigma$
$\mu - \sigma$
$\mu$
$\mu + \sigma$
$\mu + 2\sigma$
$\mu + 3\sigma$
68.26%
95.44%
99.74%

# 标准正态分布函数的性质

- 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 且已知 $P(X < c) = p$, 则有

$$p = P(X < c) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$$

由此可反解出 $c = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$.

  - 这里 $\Phi^{-1}(x)$ 表示标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的反函数
  - 可根据表由里向外查得, 例如 $\Phi^{-1}(0.5871) = 0.22$.

# 正态分布: 例 0.93

**例 0.93** 已知某公司员工每个月的工资服从正态分布 $\mathcal{N}(6000, \sigma^2)$, 试求:

i) 若已知标准差 $\sigma = 500$, 求工资在 5000 与 7000 之间的员工在公司中占比多少?

ii) 当标准差 $\sigma$ 为何值时, 工资在 5000 与 7000 之间的员工在公司中占比为 0.803?

# 解答: 例 0.93

题目: 已知某公司员工每个月的工资服从正态分布 $\mathcal{N}(6000, \sigma^2)$, 试求:

i) 若已知标准差 $\sigma = 500$, 求工资在 5000 与 7000 之间的员工在公司中占比多少?

ii) 当标准差 $\sigma$ 为何值时, 工资在 5000 与 7000 之间的员工在公司中占比为 0.803?

解答:

- 将一般正态分布转换成标准正态分布后查表求解.
- 设随机变量 $X$ 的表示公司员工每个月的工资, 则 $X \sim \mathcal{N}(6000, \sigma^2)$. 针对问题 i), 当 $\sigma = 500$ 时通过查询标准正态分布函数表有

$$P(5000 \leq X \leq 7000) = P\left(-2 \leq \frac{X - 6000}{500} \leq 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544.$$

针对问题 ii), 有

$$P(5000 \leq X \leq 7000) = P\left(-\frac{1000}{\sigma} \leq \frac{X - 6000}{500} \leq \frac{1000}{\sigma}\right) = 2\Phi(\frac{1000}{\sigma}) - 1 = 0.803.$$

于是得到 $\Phi(1000/\sigma) = 0.9015$, 通过查表可知 $\sigma \approx 775.2$.

# 正态分布: 例 0.94

**例 0.94** 一工厂生产的电子管寿命 $X$ (单位: 小时) 服从参数为 $\mu = 160$ 和标准差 $\sigma$ 的正态分布. 若 $P(120 < X \leq 200) \geq 0.8$, 则允许 $\sigma$ 最大为多少?

# 解答: 例 0.94

题目: 一工厂生产的电子管寿命 $X$ (单位: 小时) 服从参数为 $\mu = 160$ 和标准差 $\sigma$ 的正态分布. 若 $P(120 < X \leq 200) \geq 0.8$, 则允许 $\sigma$ 最大为多少?

解答:

- 展开 $P(120 < X \leq 200) \geq 0.8$

$$\Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.8$$

- 可以求得

$$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9$$

- 通过查表, 则有 $40/\sigma \geq 1.28$, 则 $\sigma \leq 31.25$.