

Ch04: 连续型随机变量

# **Distribution Functions, Probability Density Functions, and Statistical Quantity**

September 14, 2026

# 提纲: 连续型随机变量

- 分布函数
- 密度函数
- 数字特征
  - . 期望
  - . 函数期望 (Jensen 不等式)
  - . 方差
- 常见的连续型随机变量和分布
  - . 均匀分布: 分布函数、密度函数、数字特征
  - . 指数分布: 分布函数、密度函数、无记忆性、数字特征
  - . 正态分布: 分布函数、密度函数、数字特征、标准正态分布

# 随机变量的分布函数

**定义 0.27** 给定任意随机变量  $X$  和实数  $x$ , 函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

称为随机变量  $X$  的分布函数, 分布函数的本质是概率.

- 分布函数  $F(x)$  定义在  $(-\infty, +\infty)$  的普通函数, 将概率与普通函数联系起来, 有利于利用数学分析的知识来研究随机变量;
- 分布函数不限制随机变量的类型, 无论是离散型随机变量还是非离散型随机变量, 都有各自的分布函数;
- 对任意实数  $x_1 < x_2$ , 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

# 分布函数的性质

分布函数  $F(x)$  具有如下性质:

- 单调性: 若  $x_1 < x_2$ , 则  $F(x_1) < F(x_2)$
- 规范性:  $F(x) \in [0, 1]$  且  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$
- 右连续性:  $F(x+0) = F(x)$

任何分布函数都需要满足上述三性质, 满足上述三性质的函数必是某随机变量的分布函数. 分布函数可由上述三性质完全刻画.

## 概率的计算

有了分布函数  $F(x)$ , 就很容易计算随机变量  $X$  的概率, 如:

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$P(X < a) = F(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a - 0)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$$

## 分布函数：例 0.80

对离散型随机变量  $X$ ，设其分布列为  $p_k = P(X = x_k)(k = 1, 2, \dots)$ ，可得  $X$  的分布函数为：

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$$

**例 0.80** 随机变量  $X$  的分布列如下，求  $X$  的分布函数.

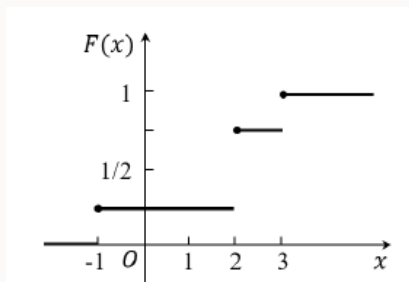
|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -1  | 2   | 3   |
| $P$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

## 解答: 例 0.80

题目: 随机变量  $X$  的分布列为  $P(X = -1) = P(X = 3) = 1/4$  和  $P(X = 2) = 1/2$ , 求  $X$  的分布函数

解答:

- 对离散型随机变量  $X$ , 设其分布列为  $p_k = P(X = x_k) (k = 1, 2, \dots)$ ,  $X$  的分布函数为  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$ .
- 当  $x < -1$ , 有  $F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$ ; 当  $-1 \leq x < 2$ , 有  $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$ ; 当  $2 \leq x < 3$ , 有  $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$ ; 当  $x \geq 3$ , 有  $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$ .
- 如下图所示, 分布函数  $F(x)$  是一条阶梯形的曲线, 在  $x = -1, 2, 3$  处有跳跃点.



## 分布函数: 例 0.81

**例 0.81** 随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = A + B \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$ , 求  $P(X \leq 1)$ .

## 解答: 例 0.81

题目: 随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = A + B \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$ , 求  $P(X \leq 1)$ .

解答:

- 直接代入定义:  $F(1) = A + B \arctan 1 = A + B\pi/4$ .
- 由分布函数的性质可知,  $F(-\infty) = 0$  和  $F(+\infty) = 1$ .
- 求解下列式子:

$$0 = F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A + B \arctan x = A - \pi B/2$$

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A + B \arctan x = A + \pi B/2$$

可得  $A = 1/2$  和  $B = 1/\pi$ , 从而得到  $P(X \leq 1) = 3/4$ .

## 回顾：随机变量

根据取值类型, 可以将随机变量进行分类:

- 离散型随机变量:  $X$  的取值是有限的、无限可列的

- 抛一枚骰子的点数:  $1, 2, \dots, 6$  —— 有限的

|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|---|

- 国家一年出生的婴儿数:  $1, 2, \dots, n$  —— 有限的或者无限可列的

|     |   |   |     |     |     |
|-----|---|---|-----|-----|-----|
| $X$ | 1 | 2 | ... | $n$ | ... |
|-----|---|---|-----|-----|-----|

- 非离散型随机变量:  $X$  的取值是无限不可列的

## 连续型随机变量 – 概率密度函数

**定义 0.28** 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 如果存在可积函数  $f(x)$ , 使得对任意实数  $x$  有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \mathrm{d}x$$

成立, 则称  $X$  为连续型随机变量, 函数  $f(x)$  为随机变量  $X$  的概率密度函数, 简称密度函数.

Remarks:

- 随机变量的取值  $x$  的取值为连续型, 通常整个区间  $[a, b]$  或  $(a, \infty)$ , 例如火车的到站时间、或一盏灯泡的寿命等.
- 随机变量的分布函数由一元积分表示 **why ?**

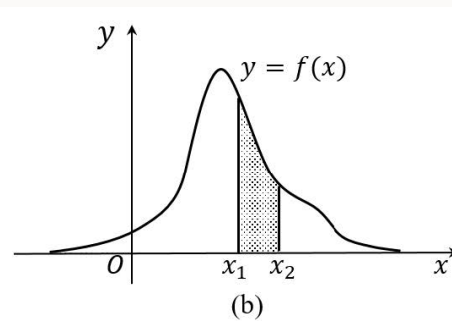
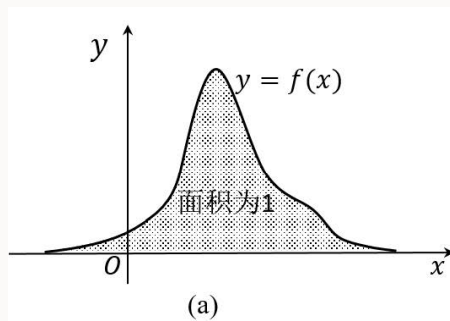
## 密度函数的几何解释 for 分布函数由一元积分表示

密度函数  $f(x)$  满足非负性  $f(x) \geq 0$  和规范性  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dt = 1$ .

- 根据规范性可知曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴所围成的面积为 1. 对任意  $x_1 \leq x_2$ , 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dt$$

- 几何解释:  $X$  落入区间  $(x_1, x_2]$  的概率等于  $x$  轴,  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  和  $y = f(x)$  所围成的曲边梯形的面积.  $f(x)$  指向  $x$  点处的可能性.



## 密度函数：例 0.82

**例 0.82** 设连续随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 且  $f(x) = f(-x)$ . 令  $F(x)$  为  $X$  的分布函数, 则对于任意实数  $a$ , 有

- (a)  $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x) \, dx$
- (b)  $F(-a) = 1/2 - \int_0^a f(x) \, dx$
- (c)  $F(-a) = F(a)$
- (d)  $F(-a) = 2F(a) - 1$

## 解答: 例 0.82

题目: 设连续随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 且  $f(x) = f(-x)$ . 令  $F(x)$  为  $X$  的分布函数, 则对于任意实数  $a$ , 有

- (a)  $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x) dx$
- (b)  $F(-a) = 1/2 - \int_0^a f(x) dx$
- (c)  $F(-a) = F(a)$
- (d)  $F(-a) = sF(a) - 1$

解答: 这里的核心在于计算  $F(-a)$ . 根据定义, 有

$$\begin{aligned} F(-a) &= \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx \\ &= - \int_{+\infty}^a f(y) dy = \int_a^{+\infty} f(y) dy \quad (\text{let } y = -x) \end{aligned}$$

所以  $F(-a) + F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , 进而

$$F(-a) = 1 - F(a) \quad \text{或者} \quad = 1/2 - \int_0^a f(x) dx$$

## 密度函数：例 0.83

例 0.83 设连续随机变量  $X$  的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ a - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

求分布函数  $F(x)$  .

## 解答: 例 0.83

题目: 如上所述.

解答:

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (a - t) dt = a - 1$$

从而求解出  $a = 2$ , 于是得到具体的密度函数  $f(x)$ .

- 当  $x \leq 0$  时, 有  $F(x) = 0$ ; 当  $0 < x \leq 1$  时, 有

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x^2/2;$$

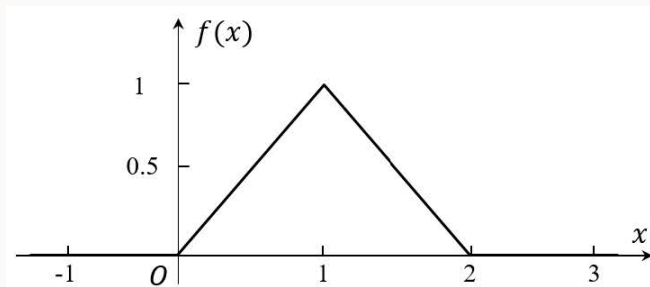
当  $1 < x \leq 2$  时, 有

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 1/2 + \int_1^x (2 - t) dt = -x^2/2 + 2x - 1;$$

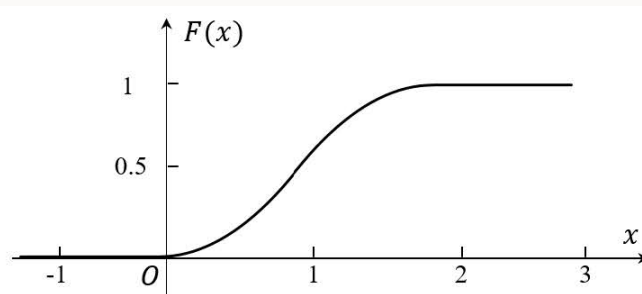
当  $x \geq 2$  时, 有  $F(x) = 1$ . 综合可得

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2/2 & 0 < x \leq 1, \\ -x^2/2 + 2x - 1 & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

随机变量  $X$  的密度函数和分布函数如下图所示.



(a) 概率密度函数



(b) 分布函数

## 密度函数：例 0.84

**例 0.84** 对连续随机变量  $X$ ，当  $x \in (0, 3)$  时密度函数  $f(x) = cx^2$ ，在其它点的密度函数  $f(x) = 0$ 。设随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & X \in (1, 2) \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

求概率  $P(Y \geq X)$ 。

## 解答: 例 0.84

题目: 如上所述.

解答:

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 9c$ , 由此可得  $c = 1/9$ .
- 用  $F_Y(y)$  表示随机变量  $Y$  的分布函数. 当  $y < 1$  时, 有  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$ ; 当  $y \geq 2$  时, 有  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$ ; 当  $1 \leq y < 2$  时, 有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Y = 1) + P(1 < Y \leq y) \\ &= P(X \geq 2) + P(1 < X \leq y) = \int_2^3 t^2/9 dt + \int_1^y t^2/9 dt = (18 + y^3)/27 \end{aligned}$$

由此可得随机变量  $Y$  的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1, \\ (18 + y^3)/27 & y \in [1, 2), \\ 1 & y \geq 2. \end{cases}$$

可以观察到随机变量  $Y$  不是连续型随机变量, 也不是离散型随机变量. 最后计算概率

$$P(X \leq Y) = P(X < 2) = \int_0^2 t^2/9 dt = 8/27$$

## 概率密度函数相关定理

**定理 0.9** 对连续随机变量  $X$ , 其分布函数  $F(x)$  在整个实数域上连续; 若  $f(x)$  在  $x$  点连续, 则  $F(x)$  在  $x$  点可导, 且  $F'(x) = f(x)$ .

分布函数的导数是概率密度函数, 概率密度函数的积分是分布函数?

**定理 0.10** 对连续型随机变量  $X$  和常数  $x$ , 有  $P(X = x) = 0$ .

Remarks:

- 事件是孤点的: 一个事件的概率为 0, 不能推出该事件是不可能事件; 一个事件的概率为 1, 也不能推出该事件是必然事件.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$ .
- 注意: 概率密度函数不是概率, 即  $P(X = x) = 0 \neq f(x)$ .

## 概率与密度函数的关系

若  $f(x)$  在点  $x$  连续, 根据连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t) \, dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x f(\xi)}{\Delta x} \\ &= 2f(x)\Delta x\end{aligned}$$

其中  $\xi \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$ , 由此可得

$$P(x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x) \approx 2f(x)\Delta x$$

概率密度  $f(x)$  越大, 则  $X$  在  $x$  附近取值的概率越大.

## 统计量一：期望

**定义 0.29** 设连续随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) \mathrm{d}x$  收敛, 称  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \mathrm{d}x$  为随机变量  $X$  的期望, 记为  $\mathbb{E}(X)$ , 即

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \mathrm{d}x$$

**例 0.85** 物理学中用到的柯西分布为: 随机变量  $X$  的密度函数是

$$f(x) = 1/\pi(1+x^2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

求期望  $\mathbb{E}(X)$ .

## 解答：例 0.85

题目：物理学中用到的柯西分布为：随机变量  $X$  的密度函数是  $f(x) = 1/\pi(1+x^2)(x \in \mathbb{R})$ ，求期望  $\mathbb{E}(X)$ 。

解答：

- 根据随机变量  $X$  的期望  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^{+\infty} = +\infty$$

- 由上可知柯西分布的期望不存在。

## 连续期望的性质

- 对任意常数  $a, b$  和连续随机变量  $X$ , 有  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ .
- 对常数  $c_1, \dots, c_n$  和连续函数  $g_1(x), \dots, g_n(x)$ , 有

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n c_i g_i(X) \right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}(g_i(X))$$

- 对连续随机变量  $X$  和凸函数  $f(x)$ , 有  $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$ .
- 对连续随机变量  $X$  和凹函数  $f(x)$ , 有  $f(\mathbb{E}(X)) \geq \mathbb{E}(f(X))$ .

## 非负随机变量期望的等价定义

**定义 0.30** 对非负随机变量  $X$ , 有

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t) \, dt$$

证明: 概率 = 积分, 积分换序

推论: 对非负随机变量  $g(X)$ , 有  $\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^{+\infty} P(g(X) > t) \, dt$ .

# 非负随机变量期望的等价定义

求证:  $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt$  for  $X \geq 0$

证明: It is observed that

$$x = \int_0^x 1 ds = \int_0^x \mathbb{I}(s \leq x) ds = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq x) ds .$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq X) ds \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbb{I}(s \leq x) ds \right] f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbb{I}(x \geq s) f(x) dx \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^s \mathbb{I}(x \geq s) f(x) dx \right] ds + \int_0^{+\infty} \left[ \int_s^{+\infty} \mathbb{I}(x \geq s) f(x) dx \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_s^{+\infty} f(x) dx \right] ds = \int_0^{+\infty} P(X \geq s) ds . \end{aligned}$$

## 统计量二：函数期望

**定理 0.11** 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x)$ 、且  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$  绝对可积, 则随机变量  $Y = g(X)$  的期望

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$$

## 函数期望：例 0.86

**例 0.86** 古人运送粮草, 如果早到每天需要的存储费用  $c$  元, 如果晚到每天需要的延期费用为  $C$  元. 粮草在运送过程中存在天气、路况等不确定因素, 因此运送需要的天数是随机的, 概率密度函数为  $f(x)$ , 问什么时候出发才能使费用的期望值最小?

## 解答: 例 0.86

解答:

- 先列出所需费用的分布函数, 再求期望的表达式及其最小值.
- 用随机变量  $X$  表示实际的运送天数, 分布函数为  $F(x)$ . 不妨假设提前了  $t$  天出发 ( $t$  也表示运粮约定时间), 那么所需费用为

$$\ell_t(X) = \begin{cases} c(t - X) & X \leq t, \\ C(X - t) & X > t. \end{cases}$$

- 因此可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ell_t(X)] &= \int_0^{+\infty} \ell_t(x) f(x) dx = \int_0^t c(t - x) f(x) dx + \int_t^{+\infty} C(x - t) f(x) dx \\ &= ctF(t) - c \int_0^t xf(x) dx + C \int_t^{+\infty} xf(x) dx - Ct(1 - F(t)) \end{aligned}$$

- 该函数是一个关于运粮约定时间或者提前出发事件  $t$  的函数

- 对上式中的  $t$  求导、并令导数为零可得

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[\ell_t(X)] = cF(t) - C(1 - F(t)) = (c + C)F(t) - C$$

求解可得期望最小的天数  $t^*$  满足

$$F(t^*) = C/(c + C)$$

## 统计量三：方差

**定义 0.31** 设连续随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 称

$$\mathbb{V}\text{AR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt$$

等价地

$$\mathbb{V}\text{AR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \right)^2$$

为随机变量  $X$  的方差.

连续函数方差的性质: (证明留作作业)

- 对任意常数  $a, b$  和连续随机变量  $X$ , 有  $\mathbb{V}\text{AR}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}\text{AR}(X)$
- 对于常数  $c$ , 有  $\mathbb{V}\text{AR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \leq (X - c)^2$
- 对于  $X \in [a, b]$ , 有  $\mathbb{V}\text{AR}(X) \leq (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$

## 方差: 例 0.87

例 0.87 设随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求  $X$  的方差  $\text{VAR}(X)$  和  $-2X + 3$  的方差  $\text{VAR}(-2X + 3)$ .

## 解答: 例 0.87

题目: 设随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求  $X$  的方差  $\text{VAR}(X)$  和  $-2X + 3$  的方差  $\text{VAR}(-2X + 3)$ .

解答:

- 根据方差的定义可知, 因为  $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ , 且

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3}x dx = \frac{14}{9}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{3}x dx = \frac{5}{2}$$

由此可得  $\text{VAR}(X) = \frac{13}{162}$ .

- 根据方差的性质得,  $\text{VAR}(-2X + 3) = 4 \cdot \text{VAR}(X) = \frac{26}{81}$

# 本节内容：几种常见的连续型随机变量和分布

| 类型      | 知识点                   |
|---------|-----------------------|
| 均匀分布    | 分布函数、密度函数、数字特征        |
| 指数分布    | 分布函数、密度函数、无记忆性、数字特征   |
| 正态分布    | 分布函数、密度函数、数字特征、标准正态分布 |
| 相关的经典例题 |                       |