

Ch05: 多维随机变量及其数字特征

Numerical Characteristics of Multi-dimensional Random Vectors

October 10, 2026

回顾：多维正态分布的标准化

Focus: 设 n 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 以及正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值分解 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}$, 则随机向量

$$Y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}(X - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n).$$

我们需要明确两件事情:

- $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n)$ 的分量之间是独立的. 进一步, 当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对角阵的时候, 多元正态分布的随机变量之间是独立的.
- $\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}(X - \boldsymbol{\mu})$ 所带来的线性变换可以将 X 标准化.

线性运算的基本性质

- 回忆: 矩阵的特征值和特征向量. 以二维为例, 矩阵 $\mathbf{A}$ 拥有特征值 λ_1 和 λ_2 , 分别对应特征向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. 则有

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2$$

进而有 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$ with $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^{-1}$, 即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

- 几何性质. For the case of $\mathbf{A}\mathbf{v}$ given any $\mathbf{v}$,
 - 矩阵 $\mathbf{U}$ 负责对 $\mathbf{v}$ 进行旋转
 - 矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 负责对 $\mathbf{v}$ 进行放缩

线性运算的基本性质

举个栗子, $\mathbf{A} = [1, 2; 2, 1]$

- 求特征值. $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, 得 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 3$.

- 求特征向量. 当 $\lambda_1 = -1$ 时,

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$$

所以, $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. 同理, 有 $\mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

- 根据 $\mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}$, 可理解为

- 正交坐标轴 $\mathbf{U}$ 上的向量 = 正交坐标轴 $\mathbf{U}$ 的线性组合

- 协交坐标轴 $\mathbf{A}$ 上的向量 = 协交坐标轴 $\mathbf{A}$ 的线性组合

- For the case of $\mathbf{A}\mathbf{v}$, $\mathbf{U}\mathbf{v}$ 实现了对 $\mathbf{v}$ 的旋转, 而 $\mathbf{\Lambda}$ 实现了对 $|\mathbf{v}|$ 的放缩.

为了授课方便, 这里只关心对称的方阵. 同理, 可以推至非方阵的情况.

线性运算的基本性质

如果我们面对一个运算 $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$,

- $\mathbf{b}$ 是平移
- $\mathbf{U}$ 是旋转, if $|\mathbf{U}| = 1$
- $\mathbf{\Lambda}$ 是放缩, as $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}|$

面对 $\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$

- $-\boldsymbol{\mu}$ 或者 $-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}$ 是平移, 使得 $\mathbf{X} - \mathbf{u}$ 以原点为中心 ($\mathbf{X}$ 以 $\mathbf{u}$ 为中心)
- $\mathbf{U}$ 是旋转
- $\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$ 是放缩, 尤其是在 $\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\bar{\mathbf{X}}$ 的情形下

线性变换可以将 X 标准化

我们有

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{I}_n \mathbf{y}$$

• 一方面,

$$\bar{\mathbf{x}}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})^\top \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})$$

• 另一方面,

$$|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \bar{X}| = |\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \bar{X}| = |Y|$$

所以,

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{x}}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{x}}| &= |(\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})^\top \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})| \\ &= |(\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})^\top| |\boldsymbol{\Lambda}^{-1}| |(\mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{x}})| \\ &= |\mathbf{x}^\top| |\boldsymbol{\Lambda}^{-1}| |\mathbf{x}| \\ &= |\mathbf{y}^\top| |\mathbf{y}| \end{aligned}$$

线性变换可以将 X 标准化

根据

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left(-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) / 2 \right)$$

和

$$Y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \boldsymbol{U} (X - \boldsymbol{\mu})$$

有

$$f_Y(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-n/2} \exp \left(-\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} / 2 \right)$$

对角的协方差矩阵对应独立性

求证: 当 Σ 为对角阵的时候, 多元正态分布的随机变量之间是独立的.

回顾: 多维正态分布的密度函数

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) / 2 \right)$$

如果 Σ 为对角阵, 假设为 $\Sigma^{-1} = \text{Diag}\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$. 则指数项可以拆解为

$$\frac{-1}{2} [\lambda_1^{-1}(\bar{x}_1)^2 + \dots + \lambda_n^{-1}(\bar{x}_n)^2]$$

进而有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1/2} \right) \exp \left(\frac{-1}{2} [\lambda_1^{-1}(\bar{x}_1)^2 + \dots + \lambda_n^{-1}(\bar{x}_n)^2] \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda_i}} \right) \exp \left[-\frac{(\bar{x}_1)^2}{2\lambda_1} - \dots - \frac{(\bar{x}_n)^2}{2\lambda_n} \right] \end{aligned}$$

对角的协方差矩阵对应着独立性

重新整理

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1/2} \right) \exp \left(\frac{-1}{2} [\lambda_1^{-1}(\bar{x}_1)^2 + \cdots + \lambda_n^{-1}(\bar{x}_n)^2] \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} \right) \exp \left[-\frac{(\bar{x}_1)^2}{2\lambda_1} - \cdots - \frac{(\bar{x}_n)^2}{2\lambda_n} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} \exp \left(-\frac{(\bar{x}_i)^2}{2\lambda_i} \right) \right) \end{aligned}$$

因此, 有

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

基于上述运算, 我们可以推导多维正态分布其他性质 – 证明已留作思考题

设随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^\top$, 以及

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix} \right),$$

则有

- 随机向量 X 和 Y 的边缘分布为 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_{xx})$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \Sigma_{yy})$
- 随机向量 X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\Sigma_{xy} = \mathbf{0}_{m \times n}$ (元素全为零的 $m \times n$ 矩阵)
- 在 $X = \mathbf{x}$ 的条件下, 随机向量 Y 的分布

$$Y \mid X = \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu_y + \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x), \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy})$$

- 在 $Y = \mathbf{y}$ 的条件下, 随机向量 X 的分布

$$X \mid Y = \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mu_x + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \mu_y), \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx})$$

数字特征的引言

类似于一维随机变量的数字特征, 多维随机变量也有数字特征

- 一方面是各分量自己的数字特征, 比如: 期望、方差、标准差等
- 另一方面是分量之间的关联程度, 反映随机变量间相依关系的数字特征, 即协方差与相关系数.

多维随机向量函数的期望

定义 **0.55** [Informally, 期望 = < 取值, 概率 >]

离散随机变量 (X, Y) 的分布列为 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

连续随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) \, dx \, dy.$$

期望的性质

- 若随机向量 $X \geq Y$, 则 $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$;
- **线性性**. 对任意随机向量 X 和 Y , 有 $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;
- 对任意随机向量 X 和 Y , 有 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

- **独立可乘**. 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 有 $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$;
- **独立方差**. 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 有 $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$.

多维随机向量函数的期望：例 0.121

例 0.121 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 求 $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$.

解答：例 0.121

题目：设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ ，求 $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$ 。

解答：

- 由题易知 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

- 将二维平面区域分为两部分 $D_1 = \{(x, y) : x \geq y\}$, $D_2 = \{(x, y) : x < y\}$ ，于是得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max(X, Y)] &= \int \int_{D_1} x f(x, y) \, dx \, dy + \int \int_{D_2} y f(x, y) \, dx \, dy \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x f(x, y) \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} y f(x, y) \, dy \\&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x f(x, y) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

多维随机向量函数的期望：例 0.122

例 0.122 某水果超市在每星期一进货一定数量的新鲜水果, 假设一周内出售水果的件数 $X \sim U(10, 20)$. 若这一周内出售一件水果获利 10 元, 若不能出售则因为水果过期而每件亏损 4 元, 求期望意义下水果超市的最优进货策略.

解答：例 0.122

题目：如上所述.

解答：

- 不妨设水果超市每周进货 n 件 ($10 \leq n \leq 20$), 则它的周利润为

$$Y = \begin{cases} 10n, & X \geq n \\ 10X - 4(n - X), & X < n \end{cases}$$

- 周利润 Y 是关于 X 的随机变量, 考虑在期望下的最优策略

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=10}^{n-1} (10i - 4(n - i))P(X = i) + \sum_{i=n}^{20} 10nP(X = i) \\ &= \sum_{i=10}^{n-1} \frac{14i - 4n}{10} + \sum_{i=n}^{20} n = \frac{-7n^2 + 243n + 630}{10}. \end{aligned}$$

上式对 n 求导并令导数为零, 求解可得 $n = 17.36$. 则 n 可能取 17 或者 18, 经验证, 最后取 $n = 17$.

多维随机向量函数的条件期望

回顾: 对二维随机向量 (X, Y) 而言, 随机变量 X 的条件分布, 即给定随机变量 Y 取值的条件下 X 的概率分布. 而条件期望是条件分布的数学期望, 具体定义如下:

定义 0.56 设 (X, Y) 为离散型随机向量, 在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件分布列为 $P(X = x_i | Y = y)$, 称

$$\mathbb{E}(X|y) = \mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y)$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件期望**. 设 (X, Y) 为连续型随机向量, 在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件密度函数为 $f_{X|Y}(x|y)$, 称

$$\mathbb{E}(X|y) = \mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件期望**.

无条件期望 $\mathbb{E}(X)$ 是一个常数, 而条件期望 $\mathbb{E}(X|Y = y)$ 是 y 的函数; 例如用 X 表示中国成年人的身高, Y 表示中国成年人的足长, 我国公安部门研究得足长为 y 的中国成年人平均身高为 $\mathbb{E}(X|Y = y) = 6.876y$, 此公式常用于公安痕迹侦查中.

条件期望的性质

- **线性性.** 对任意常数 a, b 有 $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2|Y) = a\mathbb{E}(X_1|Y) + b\mathbb{E}(X_2|Y)$;
- **函数型.** 对离散型随机向量 (X, Y) 和函数 $g(X)$, 有

$$\mathbb{E}(g(X)|Y) = \sum_i g(x_i)P(X = x_i|Y = y)$$

对连续型随机向量 (X, Y) 和函数 $g(X)$, 有

$$\mathbb{E}(g(X)|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x|Y = y) \mathrm{d}x$$

- 若随机向量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则在 $Y = y$ 的条件下随机变量 X 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu_x - \rho\sigma_x(y - \mu_y)/\sigma_y, (1 - \rho^2)\sigma_x^2)$, 由此可得

$$\mathbb{E}(X|y) = \mu_x - \frac{\rho\sigma_x(y - \mu_y)}{\sigma_y}$$

多维随机向量函数的条件期望：例 0.123

例 0.123 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-y), & 0 < x < y < +\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求条件期望 $\mathbb{E}(X|y)$.

解答：例 0.123

题目：如上所述.

解答：

- 根据条件期望的定义 $\mathbb{E}(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$, 计算 Y 的边缘密度函数, 当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^y \exp(-y) dx = y \exp(-y),$$

由此得到条件分布

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y < +\infty),$$

由此可得

$$\mathbb{E}(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^y \frac{x}{y} dx = \frac{y}{2}.$$

二重期望公式

定理 0.31 [二重期望公式] 设 (X, Y) 是二维随机向量, 且 $\mathbb{E}(X)$ 存在, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) \\ &= \begin{cases} \sum_i \mathbb{E}(X|Y = y_i) P(Y = y_i), & \text{若 } Y \text{ 是一个离散型随机变量} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(X|Y = y) f_Y(y) \, dy, & \text{若 } Y \text{ 是一个连续型随机变量} \end{cases}\end{aligned}$$

二重期望公式在实际中很有用, 譬如, 在计算取值范围很大的 X 的期望 $\mathbb{E}(X)$ 时, 可以通过构建与 X 有关的量 Y , 通过 Y 的不同取值将大范围划分成若干小区域. 先在小区域上求 X 的平均, 再对此类平均求加权平均, 即可得到大范围上 X 的期望 $\mathbb{E}(X)$.

推论：全期望公式

回顾: 对任意事件 A 而言, 根据全概率公式有 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$; 即通过对样本空间的切割划分, 将一个复杂事件化成相对简单的事件来求其概率; 借鉴这种化繁为简的思想, 也可以通过全期望公式计算复杂事件的期望, 具体如下:

定理 0.32 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 一个分割, $A_i A_j = \emptyset$ 和 $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$. 对任意随机变量 X 有

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|A_1)P(A_1) + \mathbb{E}(X|A_2)P(A_2) + \cdots + \mathbb{E}(X|A_n)P(A_n),$$

特别的, 随机事件 A 及其对立事件 $\bar{A}$ 构成空间 Ω 一个分割, 对任意随机变量 X 有

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|A)P(A) + \mathbb{E}(X|\bar{A})P(\bar{A}).$$

可证.

证明：全期望公式

根据二重期望公式定理 0.31, 假设 Y 有 m 个取值

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}_Y [\mathbb{E}(X \mid Y)] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X \mid Y = y_i) P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_j x_j P(x_j \mid Y = y_i) \right] P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_j x_j P(x_j \mid Y = y_i) P(Y = y_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_j x_j P(x_j \mid A_k) P(A_k)\end{aligned}$$

最后一步成立于

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n P(x_j \mid A_k)P(A_k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{k_i: y_{k_i} \in A_k} P(x_j \mid y_{k_i})P(y_{k_i} \mid A_k)P(A_k) \\ &= \sum_{i=1}^m P(x_j \mid Y = y_i)P(Y = y_i)\end{aligned}$$

多维随机向量函数的条件期望：例 0.124

例 0.124 一矿工被困在有三个门的矿井里, 第一个门通一坑道, 沿此坑道走 3 小时可使他到达安全地点; 第二个门可使他走 5 小时后回到原处; 第三个门可使他走 7 小时后也回到原地. 如设此矿工在任何时刻都等可能地选定其中一个门, 试问他到达安全地点平均要用多长时间?

解答：例 0.124

题目：如上所述.

解答：

- 设 X 为该矿工回到安全地点所需的时间, 易知 X 的取值为

$$3, 5 + 3, 7 + 3, 5 + 5 + 3, 5 + 7 + 3, 7 + 7 + 3, \dots$$

直接计算取值范围很大的 X 的期望 $\mathbb{E}(X)$ 较困难, 因此构建变量 Y 表示该矿工第一次选择的门的序号. 因此

$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3},$$

- 若矿工选择第一个门, 则 $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 3$; 若矿工选择第二个门, 则 $\mathbb{E}(X|Y = 2) = 5 + \mathbb{E}(X)$; 若矿工选择第三个门, 则 $\mathbb{E}(X|Y = 3) = 7 + \mathbb{E}(X)$; 综上所述, 由定理 0.31 有

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}[3 + 5 + \mathbb{E}(X) + 7 + \mathbb{E}(X)] = 5 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X),$$

由此可得 $\mathbb{E}(X) = 15$.

正态分布的绝对期望

定理 0.33 令随机变量 X 服从正态分布, 即 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 则有其绝对期望

$$\mathbb{E}(|X|) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \left[2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1 \right] .$$

证明过程: 正态分布的绝对期望

设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度函数 (PDF) 为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

其绝对期望 $\mathbb{E}(|x|)$ 的定义为:

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 (-x) f_X(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x f_X(x) dx}_{I_2}.$$

进行标准化代换: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则 $x = \sigma z + \mu$, $dx = \sigma dz$. 则 (1) 积分项 $I_2 = \sigma A + \mu B$ 且

$$A = \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad B = \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

计算 A : 令 $u = -\frac{z^2}{2}$, 则 $du = -z dz$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \left(-e^{-\frac{(-\mu/\sigma)^2}{2}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

计算 B : $\Phi(z)$ 是标准正态分布的 CDF, 因此有

$$B = \Phi(+\infty) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

利用 $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ 的对称性, 有

$$B = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

将 A 和 B 代入 I_2 , 有

$$I_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

(2) 积分项

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\sigma C - \mu D$$

且

$$C = \int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad D = \int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

计算 C : $\Phi(z)$ 是标准正态分布的 CDF, 因此有

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - (-e^{-\infty}) \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

计算 D :

$$D = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

将 C 和 D 代入 I_1 , 可得

$$I_1 = -\sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \right) - \mu \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - \mu \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

汇总, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|) &= I_1 + I_2 \\ &= \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - \mu \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \end{aligned}$$

整理:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} &= \sigma \sqrt{\frac{4}{2\pi}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) &= \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

得到最终解析公式:

$$\mathbb{E}(|X|) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \left[2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1 \right] .$$

多维随机向量函数的协方差

定义 0.57 设二维随机向量 (X, Y) 的期望 $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ 存在, 则称其为 X 与 Y 的协方差, 记为

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

从协方差的定义可以看出, 它是 X 的偏差 “ $X - \mathbb{E}[X]$ ” 与 Y 的偏差 “ $Y - \mathbb{E}[Y]$ ” 乘积的数学期望, 由于偏差可正可负, 故协方差也可正可负, 也可为零.

协方差的性质

- 对任意随机变量 X 与 Y , 有

$$\text{Cov}(X, X) = \text{VAR}(X) \quad \text{和} \quad \text{VAR}(X \pm Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

- 对任意随机变量 X 与 Y 和常数 c , 有

$$\text{Cov}(X, c) = 0 \quad \text{和} \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

- 对任意随机变量 X_1 、 X_2 和 Y , 有

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$$

- 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 则有 $\text{Cov}(X, Y) = 0$, 但反之不成立;
- 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \text{VAR}(X) \cdot \text{VAR}(Y)$$

等号成立的充要条件是 $Y = aX + b$ 几乎处处成立, 即 X 与 Y 之间几乎处处存在线性关系. (可证)

多维随机向量函数的协方差：例 0.125

例 0.125 设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y)/8, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 和方差 $\sigma(X + Y)$.

解答：例 0.125

题目：如上所述.

解答：

- 根据协方差的定义 $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, 计算

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \int_0^2 \int_0^2 \frac{x(x+y)}{8} \, dx \, dy = \frac{7}{6}, \quad \mathbb{E}[XY] = \int_0^2 \int_0^2 \frac{xu(x+y)}{8} \, dx \, dy = \frac{4}{3}$$

由此可得 $\text{Cov}(X, Y) = -1/36$.

- 根据方差的定义 $\sigma(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$, 计算

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \int_0^2 \int_0^2 x^2(x+y)/8 \, dx \, dy = 5/3$$

得 $\sigma(X) = \sigma(Y) = 11/36$. 最后得到

$$\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 5/9.$$

多维随机向量函数的协方差：例 0.126

例 0.126 有 n 对夫妻参加一次聚会, 将所有参会人员任意分成 n 组, 每组一男一女, 用 X 表示夫妻两人被分到一组的对数, 求 X 的期望和方差.

解答：例 0.126

题目：有 n 对夫妻参加一次聚会，将所有参会人员任意分成 n 组，每组一男一女，用 X 表示夫妻两人被分到一组的对数，求 X 的期望和方差.

解答：

- 用 X_i 表示第 i 对夫妻是否被分到一组，即

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 对夫妻被分到一组} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则 $X = X_1, X_2, \dots, X_n$. 随机变量 X_i 得分布列为

$$P(X_i = 1) = (n-1)!/n! = 1/n, \quad \text{和} \quad P(X_i = 0) = 1 - 1/n$$

于是得到期望

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \cdots + \mathbb{E}(X_n) = 1.$$

- 对任意 $i \neq j$, 有

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = (n-2)!/n! = 1/n(n-1),$$

由此得到

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = 1/n^2(n-1),$$

最后根据协方差的性质有

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) + 2 \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 1.$$

插播：线性运算的基本性质

- 回忆：矩阵的特征值和特征向量. 以二维为例, 矩阵 $\mathbf{A}$ 拥有特征值 λ_1 和 λ_2 , 分别对应特征向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. 则有

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \Lambda_i\mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2$$

进而有 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$ with $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^{-1}$, 即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

- 几何性质. For the case of $\mathbf{A}\mathbf{v}$ given any $\mathbf{v}$,
 - 矩阵 $\mathbf{U}$ 负责对 $\mathbf{v}$ 进行旋转
 - 矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 负责对 $\mathbf{v}$ 进行放缩

插播：线性运算的基本性质

如果我们面对一个运算 $\mathbf{A}x + b$,

- b 是平移
- $\mathbf{U}$ 是旋转
- Λ 是放缩

二维正态分布的协方差

定理 0.34 若随机向量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho \sigma_x \sigma_y$$

推论 若随机向量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

可证.

证明：二维正态分布的协方差

二维正态分布的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]\right)$$

这里用到了坐标变换 (归一化做法)

$$f(u, v) = f(x, y) |\mathbf{J}|, \quad (u, v) = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right), \quad |\mathbf{J}| = \sigma_x\sigma_y.$$

则有

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) \, dx \, dy \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} uv \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right) \, du \, dv \\&= \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u \exp\left(-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right) \, du\right] \, dv \\&= \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \, dv = \rho\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

协方差与方差

- 方差. 衡量单变量自身的波动性或者偏离性.

$$\text{VAR}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

- 协方差. 衡量变量间的偏离性

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

- 可以定义矩阵 Σ 用以衡量多变量的偏离程度

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{VAR}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{VAR}(Y) \end{pmatrix}$$

随机向量的数学期望与协方差阵

n 维随机向量的数学期望及方差可以通过矩阵形式给出.

定义 0.58 设 n 维随机向量为 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$, 若每个分量的数学期望都存在, 则称

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_n])',$$

为 $\mathbf{X}$ 的数学期望向量, 简称 $\mathbf{X}$ 的数学期望. 而称

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])'] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为 $\mathbf{X}$ 的方差-协方差矩阵, 简称 $\mathbf{X}$ 的协方差阵.

随机向量的协方差阵的性质

通过定义 0.58 可以看到 n 维随机向量的各分量的方差构成了协方差阵对角线上的元素, 非对角线的元素为协方差.

定理 0.35 n 维随机向量的协方差阵 $\text{Cov}(\mathbf{X}) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{n \times n}$ 是一个对称的非负定矩阵.

Remarks:

- 这说明, 协方差矩阵的特征值是实数的、非负的.
- 多维随机向量函数的协方差: 例 0.127

例 0.127 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且服从正态分布, 方差为 σ^2 . 记 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, 讨论 $\bar{X}$ 和 $\bar{X} - X_i$ 的独立性.

解答：例 0.127

题目：设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且服从正态分布，方差为 σ^2 。记 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ，讨论 $\bar{X}$ 和 $\bar{X} - X_i$ 的独立性。

解答：

- 根据正态分布的性质易知 $\bar{X}$ 和 $\bar{X} - X_i$ 都服从正态分布 (线性性)，根据定理 0.34 可知正态分布的独立性可通过协方差来研究。根据协方差的性质有

$$\text{Cov}(\bar{X}, \bar{X} - X_i) = \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_i) = \sigma(\bar{X}) - \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n}, X_i\right)$$

- 根据 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立有

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sigma \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{和} \quad \text{Cov} \left(\sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n}, X_i \right) = \frac{1}{n} \text{Cov}(X_i, X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

于是得到 $\text{Cov}(\bar{X}, \bar{X} - X_i) = 0$ ，根据定理 0.34 的推论可知 $\bar{X}$ 和 $\bar{X} - X_i$ 相互独立。

多维正态分布的联合分布和边缘分布

[命题一：联合推边缘] 若 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则有 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$.

[命题二：边缘推联合] 若 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, 则 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$?

- X and Y must be linearly correlated.

多维正态分布的联合分布和边缘分布

Counterexamples:

- If X and Y have a nonlinear relationship, they can still be marginally Gaussian, but their joint distribution will not be Gaussian.
 - $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ for $X > 0$ and $-|X| \sim \mathcal{N}(0, 1)$ for $X \leq 0$; and $Y = X$ for $Y > 0$ and $-|Y| \sim \mathcal{N}(0, 1)$ for $Y \leq 0$.
- If X and Y are drawn from a mixture of Gaussians, then each marginal distribution could be Gaussian, but the joint distribution is not jointly Gaussian.
- If the relationship between X and Y involves some discrete transformation, such as flipping or taking absolute values, the marginals might still be Gaussian, but the joint distribution will not be Gaussian.
 - $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and $Y \sim \text{sign}(X)$.

多维随机向量函数的相关系数

两个随机变量之间的关系可以分为独立与非独立, 其中非独立关系中又可以分为线性关系和非线性关系, 线性相关程度通过线性相关系数来定义.

定义 0.59 设 (X, Y) 为二维随机向量, 如果它们的标准差 σ_x 和 σ_y 存在且都不为零, 则称

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{VAR}(X) \text{VAR}(Y)}} .$$

为 X 与 Y 的线性相关系数, 简称 相关系数.

相关系数的性质

- 对任意随机变量 X 与 Y , 有 $|\rho_{XY}| \leq 1$. 等号成立的充要条件是 $Y = aX + b$ 几乎处处成立, 即 X 与 Y 之间几乎处处存在线性关系.
- 若 $\rho_{XY} = 0$, 称 X 与 Y **不相关**. 不相关是指 X 与 Y 之间没有线性关系, 但 X 与 Y 之间可能存在其他的函数关系, 比如平方关系、对数关系等;
- 若 $\rho_{XY} = 1$, 称 X 与 Y **完全正相关**; 若 $\rho_{XY} = -1$, 称 X 与 Y **完全负相关**;
- 若 $0 < |\rho_{XY}| < 1$, 称 X 与 Y **“有一定程度”的线性关系**; 若 $|\rho_{XY}|$ 越接近于 1, 则线性相关程度越高; 若 $|\rho_{XY}|$ 越接近于 0, 则线性相关程度越低.
- 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 则 X 与 Y 不相关, 但反之不成立.

正态分布的相关系数

定理 0.36 若随机向量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则有

- X 与 Y 的线性相关系数 $\rho_{XY} = \rho$
- X 与 Y 相互独立充要条件是 X 与 Y 不相关, 即 $\rho = 0$.

Remarks: 独立与不相关的等价性仅限于正态分布随机变量, 对于其他类型不一定成立.

不相关的等价条件

定理 0.37 若随机变量 X 与 Y 的方差存在且都不为零, 以下几个条件相互等价:

- X 与 Y 独立 ;
- X 与 Y 不相关, 即 $\rho_{XY} = 0$;
- 协方差 $\text{Cov}(X, Y) = 0$;
- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$;
- $\text{VAR}(X \pm Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$.

多维随机向量函数的相关系数：例 0.128

例 0.128 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 相互独立, 求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 ($\alpha, \beta \neq 1$).

解答：例 0.128

题目：设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 相互独立, 求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 ($\alpha, \beta \neq 1$).

解答：

- 根据相关系数的定义

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}}$$

计算

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2$$

$$\sigma_{Z_1}^2 = \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\sigma_{Z_2}^2 = \text{Cov}(\alpha X - \beta Y, \alpha X - \beta Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

由此可得

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

多维随机向量函数的相关系数：例 0.129

例 0.129 设随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从多项分布 $M(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$, 对任意 $i \neq j$, 求 X_i 和 X_j 的相关系数.

解答：例 0.129

题目：设随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从多项分布 $M(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$, 对任意 $i \neq j$, 求 X_i 和 X_j 的相关系数.

解答：

- 根据多项分布的性质, 有边缘分布

$$X_i \sim B(m, p_i) \quad \text{和} \quad X_j \sim B(m, p_j)$$

由此可得 $\sigma(X_i) = mp_i(1 - p_i)$ 和 $\sigma(X_j) = mp_j(1 - p_j)$.

- 对每个 $k \in [m]$, 引入随机变量

$$Y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{若第 } k \text{ 次实验的结果为 } i \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{和} \quad Y_j^k = \begin{cases} 1, & \text{若第 } k \text{ 次实验的结果为 } j \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由此可得

$$X_i = Y_i^1 + Y_i^2 + \dots + Y_i^m \quad \text{和} \quad X_j = Y_j^1 + Y_j^2 + \dots + Y_j^m$$

- 根据第 k 次实验和第 l 次实验相互独立 ($k \neq l$), 以及 $Y_i^k Y_j^l = 0$ 有

$$\text{Cov}(Y_i^k, Y_j^l) = 0 \quad \text{和} \quad \text{Cov}(Y_i^k, Y_j^k) = \mathbb{E}[Y_i^k Y_j^k] - \mathbb{E}[Y_i^k] \mathbb{E}[Y_j^k] = -p_i p_j$$

根据协方差的性质有

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m \text{Cov}(Y_i^k, Y_j^k) + \sum_{k \neq l} \text{Cov}(Y_i^k, Y_j^l) = -m p_i p_j$$

由此可得 X_i 和 X_j 的相关系数

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} = \frac{-m p_i p_j}{\sqrt{m p_i (1 - p_i)} \sqrt{m p_j (1 - p_j)}} = -\frac{p_i p_j}{\sqrt{p_i (1 - p_i)} \sqrt{p_j (1 - p_j)}}$$

二维正态分布的相关总结

二维随机变量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则随机变量 X 和 Y 的边缘分布为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

- 边缘分布服从正态分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$
- 条件分布服从正态分布

$$(X | Y = y) \sim \mathcal{N}\left(\mu_x + \rho(y - \mu_y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, (1 - \rho^2)\sigma_x^2\right)$$

- 正态分布之和是正态分布

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- 协方差 $\text{Cov}(X, Y) = \rho \sigma_x \sigma_y$
- 相关系数

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

- X 与 Y 独立, 充要条件, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 或者 $\rho = \rho_{XY} = 0$