

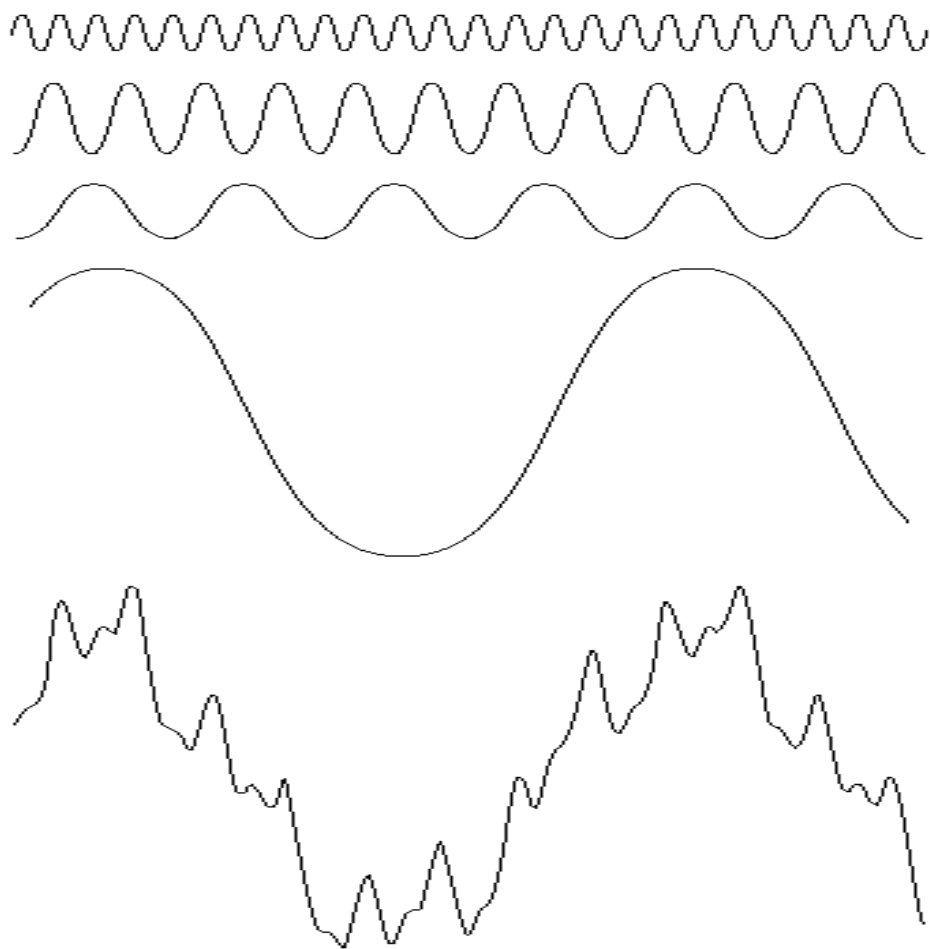
数字图像处理

频域变换

背景

- 法国数学家傅里叶(生于1768年)在1822年出版的《热分析理论》一书中指出：任何周期函数都可以表达为不同频率的正弦和或余弦和的形式，即傅里叶级数。
- 20世纪50年代后期，快速傅里叶变换算法出现，得到了广泛的应用。

背景



背景

- 在计算机的图像处理中，所谓图像变换就是为达到图像处理的某种目的而使用的一种数学技巧。图像函数经过变换后处理起来较变换前更加简单和方便，由于这种变换是对图像函数而言的，所以称为图像变换。
- 现在研究的图像变换基本上都是正交变换。正交变换可以减少图像数据的相关性，获取图像的整体特点，有利于用较少的数据量表示原始图像，这对图像的分析、存储以及图像的传输都是非常有意义的。

傅里叶变换

- 傅里叶基本思想：
将任意周期函数，分解为一组不同频率的**正弦**或者**余弦**函数的加权和。
- 傅里叶变换的效果：
把函数从时间域变到频率域
- 傅里叶变换的作用：
把图像或者信号在频域中进行处理，从而达到简化处理过程、增强处理效果。

傅里叶变换的历史



*“An arbitrary function,
continuous or with
discontinuities, defined in a finite
interval by an arbitrarily
capricious graph can always be
expressed as a sum of sinusoids”
J.B.J. Fourier*

Fig. 2.2 Jean B. Joseph Fourier (1768–1830)

Picture from R.X. Gao and R. Yan, Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing
Chapter 2 From Fourier Transform to Wavelet Transform: A Historical Perspective
DOI 10.1007/978-1-4419-1545-0_2, © Springer Science+Business Media, LLC 2011

傅里叶生平

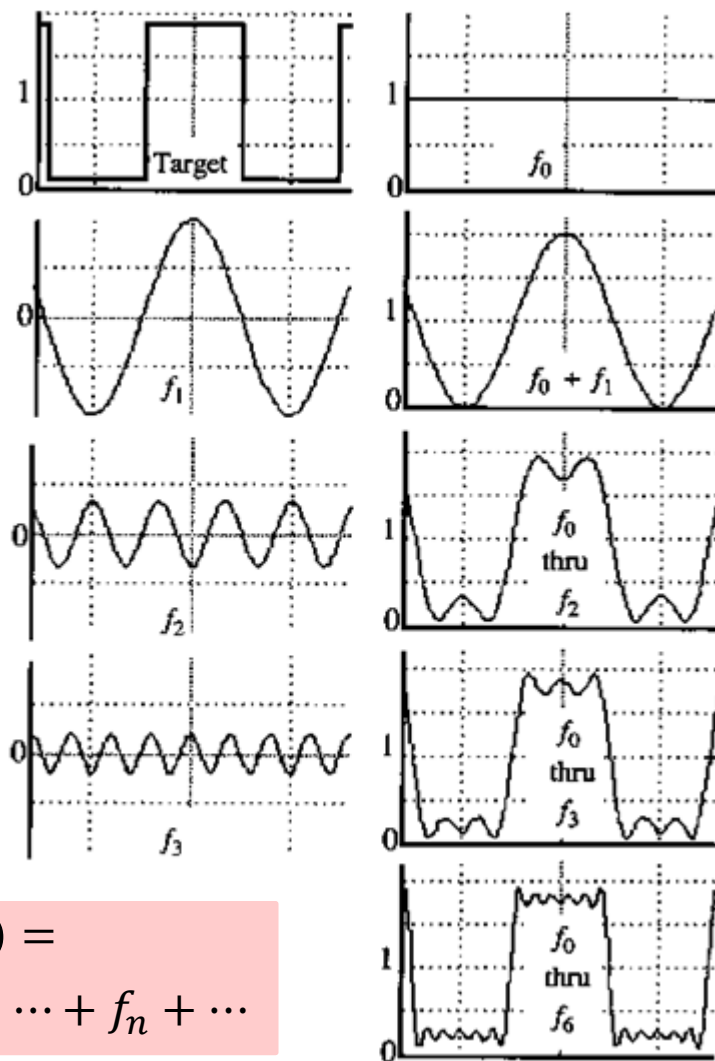
Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件
- 拉格朗日、拉普拉斯、泊松反对发表
- 1822年首次发表在“热的分析理论”一书中



傅里叶变换

- 直观理解
 - 函数分解
- 主要问题
 - 如何确定sin和cos的频率？
 - 如何确定基函数的权重？



$$f(\text{target}) = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

傅里叶变换



- 令 $f(x)$ 为实变量 x 的一维连续函数，则一维连续函数的傅里叶变换对定义为：

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

上式中 $j = \sqrt{-1}$ ， x 为时域变量， u 为频域变量。

傅里叶变换

- 连续函数的傅里叶变换
 - 狄利克雷条件：
 - 令 $f(x)$ 为实变量 x 的一维连续函数，狄利克雷条件为 $f(x)$ 具有有限个间断点、具有有限个极值点、绝对可积。
 - 在实际应用中，这些条件基本上都是可以满足的。
 - 存在性定理：当 $f(x)$ 满足狄利克雷条件时，则对应的傅里叶变换对一定存在。

傅里叶变换

- 一维连续函数的傅里叶变换对的符号表示为：

$$f(x) \Leftrightarrow F(u)$$

- 一些性质

$f(x)$ 为实函数，其傅里叶变换 $F(u)$ 通常为复函数，若 $F(u)$ 的实部为 $R(u)$ ，虚部为 $I(u)$ ，则

- 复数形式： $F(u) = R(u) + jI(u)$

- 指数形式： $F(u) = |F(u)|e^{j\theta(u)}$

- 相角： $\theta(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$

- 振幅： $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$

- 振幅谱的平方称为 $f(x)$ 的能量谱：

$$E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

二维傅里叶变换

- 一维连续函数的傅里叶变换推广到二维。
 - 如果二维函数满足狄利克雷条件，则其傅里叶变换对为

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

式中， x, y 为时域变量， u, v 为频域变量。

- 二维连续函数的傅里叶变换对的符号表示为：

$$f(x, y) \Longleftrightarrow F(u, v)$$

二维傅里叶变换

- 一些性质

- 若 $F(u, v)$ 的实部为 $R(u, v)$ ，虚部为 $I(u, v)$ ，则

- 复数形式： $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$

- 指数形式： $F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\theta(u, v)}$

- 相角： $\theta(u) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$

- 振幅： $|F(u)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

- 振幅谱的平方称为 $f(x, y)$ 的能量谱：

$$E(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

离散函数的傅里叶变换

- 连续傅里叶变换在计算机上无法直接使用，因为计算机只能处理离散数值。
- 为了在计算机上实现傅里叶变换计算，**必须把连续函数离散化**，即将连续傅里叶变换转化为离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, 简称 DFT)。

离散函数的傅里叶变换

- 设 $\{f(x)|f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$ 为一维信号 $f(x)$ 的 N 个抽样，其离散傅里叶变换对为：

$$F[f(x)] = F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N}$$

$$F^{-1}[F(u)] = f(x) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi ux/N}$$

式中： $x, u = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

离散函数的傅里叶变换

由欧拉公式可知

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

将上式代入，并利用 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ，可得

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left(\cos \frac{2\pi ux}{N} - j \sin \frac{2\pi ux}{N} \right)$$

可见，离散序列的傅里叶变换仍是一个离散的序列，每一个 u 对应的傅里叶变换结果是所有输入序列 $f(x)$ 的加权和（每一个 $f(x)$ 都乘以不同频率的正弦和余弦值）， u 决定了每个傅里叶变换结果的频率。

离散函数的傅里叶变换

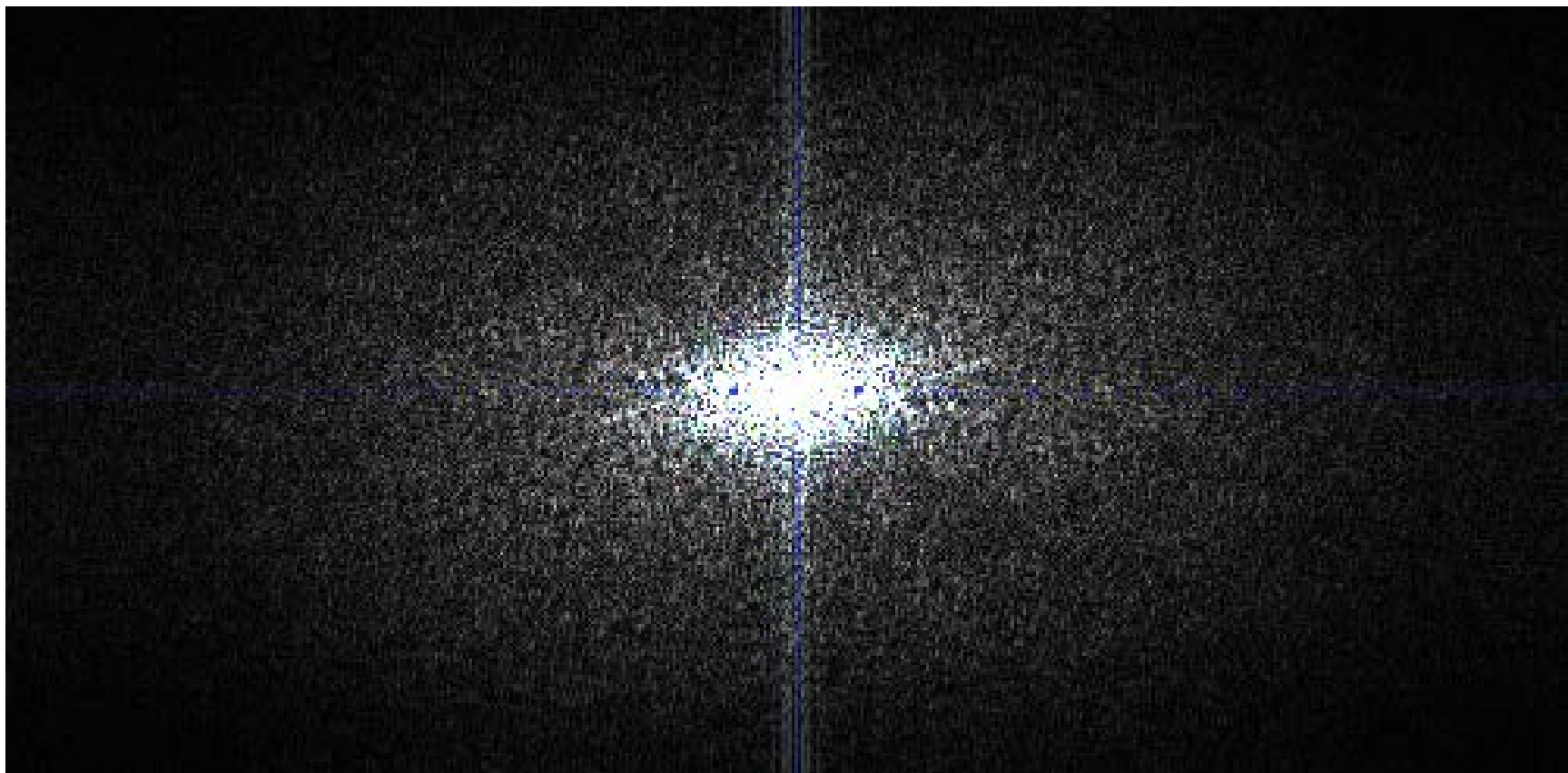
- 一维离散傅里叶变换的复数形式、指数形式、振幅、相角以及能量谱的表示类似一维连续函数的相应的表达式
- 将一维离散傅里叶变换推广到二维，则二维离散傅里叶变换对定义为：

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- 类似一维离散傅里叶变换，系数 $1/MN$ 可以在正变换或逆变换中，也可以在正变换和逆变换前分别乘以系数，只要两式系数的乘积等于 $1/MN$ 即可。
- 二维离散函数的复数形式、指数形式、振幅、相角、能量谱的表示类似二维连续函数的相应的表达式。





二维离散傅里叶变换的基本性质

序号↵	性质↵	数学定义表达式↵
1↵	线性性质↵	$af_1(x,y) + bf_2(x,y) \Leftrightarrow aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$ ↵
2↵	比例性质↵	$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$ ↵
3↵	可分离性↵	$F(u,v) = F_y\{F_x[f(x,y)]\} = F_x\{F_y[f(x,y)]\}$ ↵ $f(x,y) = F_u^{-1}\{F_v^{-1}[F(u,v)]\} = F_v^{-1}\{F_u^{-1}[F(u,v)]\}$ ↵
4↵	频率位移↵	$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$ ↵
5↵	空间位移↵	$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$ ↵ 令 $u_0=M/2$ $v_0=N/2$, 则 $f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$ ↵

二维离散傅里叶变换的基本性质

6↵	周期性↵	$f(x, y) = f(x + aN, y + bN) \text{↵}$ $F(u, v) = F(u + aN, v + bN) \text{↵}$
7↵	共轭对称性↵	$F(u, v) = F^*(-u, -v), \quad F(u, v) = F(-u, -v) \text{↵}$
8↵	旋转不变性↵	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \varphi + \theta_0) \text{↵}$
9↵	平均值↵	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = F(0, 0) \text{↵}$
10↵	卷积定理↵	$f_e(x, y) * g_e(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v) \text{↵}$ $f_e(x, y)g_e(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v) \text{↵}$
11↵	相关定理↵	$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G^*(u, v) \text{↵}$ $f(x, y)g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v) \text{↵}$

基本性质

设二维离散函数为 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ ，它们所对应的傅里叶变换分别为 $F_1(u, v)$ 和 $F_2(u, v)$ 。

- 线性性质

- $af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$

式中， a, b 为常数。

- 此性质可以节约求傅里叶变换的时间。若已经得到了 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 及 $F_1(u, v)$ 和 $F_2(u, v)$ 的值，则 $af_1(x, y) + bf_2(x, y)$ 的傅里叶变换只要求得 $aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$ 就可以了。

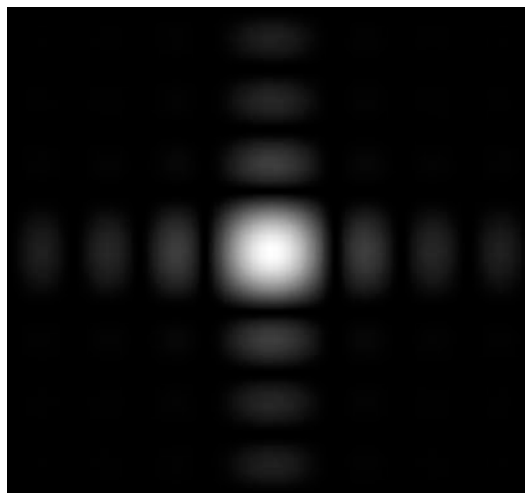
基本性质

- 比例性质

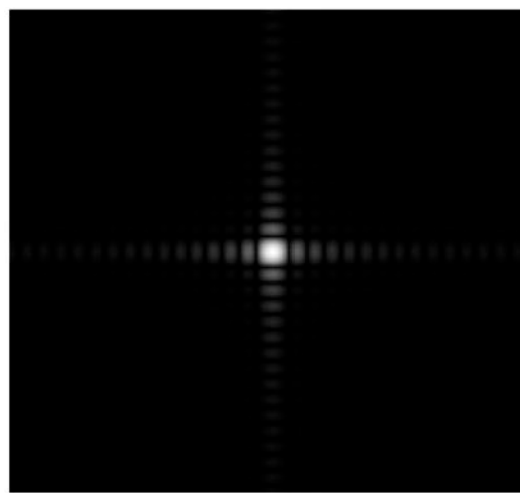
- 对于两个标量 a 和 b ，有

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- 上式说明了在空间比例尺度的展宽，相应于频域比例尺度的压缩，其幅值也减少为原来的 $1/|ab|$ ，如图所示。



(a) 比例尺度展宽前的频谱



(b) 比例尺度展宽后的频谱

基本性质

- 可分离性

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right] e^{-j2\pi ux/M}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \left[\sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi vy/N} \right] e^{j2\pi ux/M}$$

利用这个性质，一个二维离散傅里叶变换（或逆变换）可通过进行两次一维离散傅里叶变换（或逆变换）来完成。

可分离性

- 例如，以正变换为例，
先对 $f(x, y)$ 沿 y 轴进行傅里叶变换得到 $F(x, v)$,

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi y/N}$$

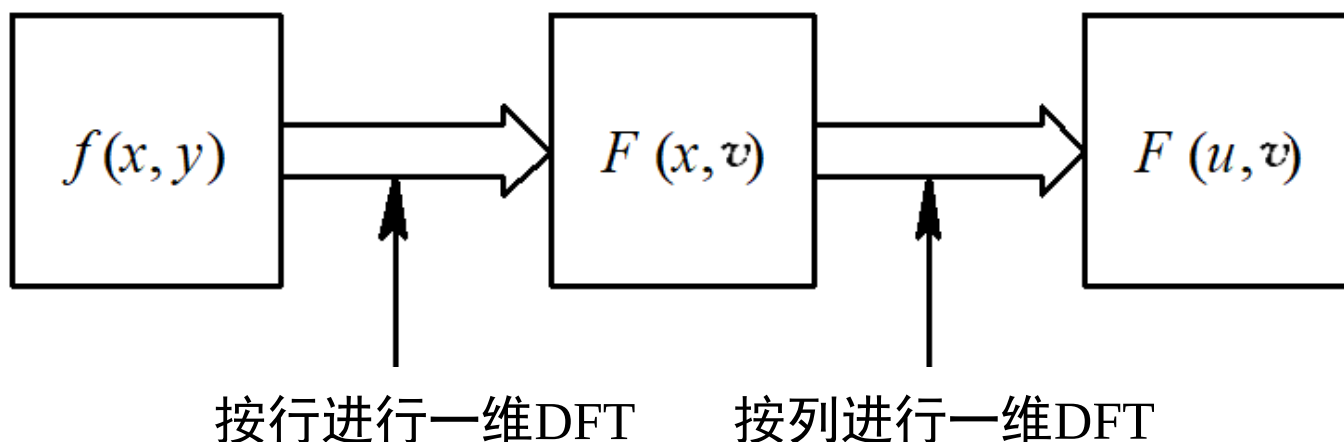
再沿着 x 轴对 $F(x, v)$ 进行一维离散傅里叶变换，得到 $F(u, v)$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M}$$

显然对 $f(x, y)$ 先沿 x 轴进行离散傅里叶变换，再沿 y 轴进行离散傅里叶变换结果一样。逆变换也是如此。

可分离性

- 先对 $f(x, y)$ 按行进行傅里叶变换得到 $F(x, v)$ ，再对 $F(x, v)$ 按列进行傅里叶变换，便可得到 $f(x, y)$ 的傅里叶变换结果。



基本性质

- 频率位移及空间位移

频率位移: $f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$

空间位移: $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$

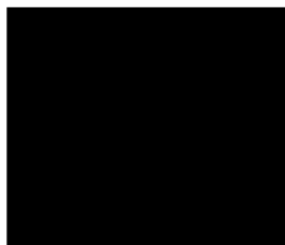
这一性质表明, 当用 $e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}$ 乘以 $f(x, y)$, 求乘积的傅里叶变换, 可以使空间频率域 u, v 平面坐标系的原点从 $(0,0)$ 平移到 (u_0, v_0) 的位置; 同样, 当用 $e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$ 乘以 $F(u, v)$, 并求此乘积的离散傅里叶反变换, 可以使空间 x, y 平面坐标系原点从 $(0,0)$ 平移到 (x_0, y_0) 的位置。

频率位移及空间位移

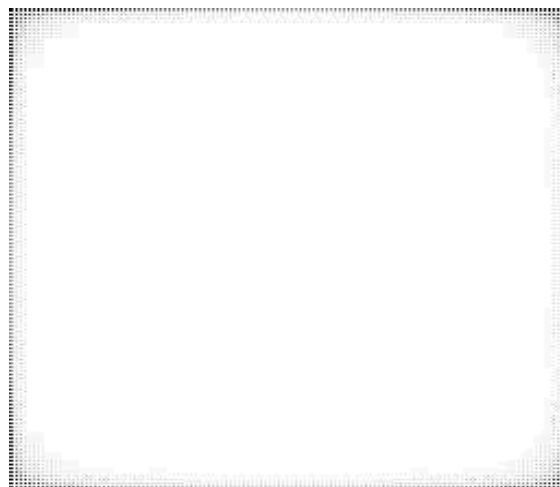
在数字图像处理中，为了清楚地分析图像傅里叶谱的分布情况，经常需要把空间频率平面坐标系的原点移到 $(M/2, N/2)$ 的位置，即令 $u_0 = M/2$ $v_0 = N/2$ ，则

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

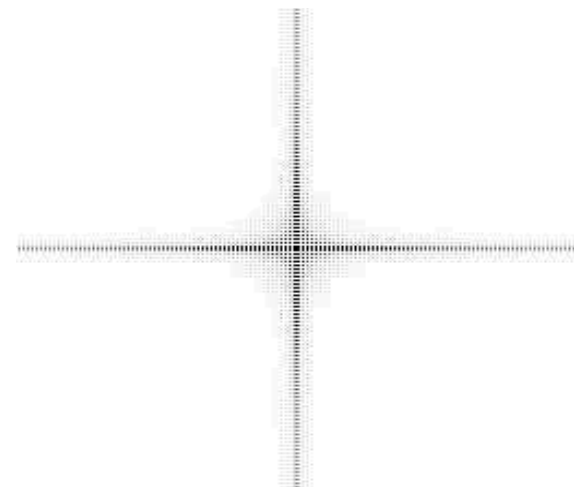
上式表明：如果需要将图像频谱的原点从起始点 $(0,0)$ 移到图像的中心点 $(M/2, N/2)$ ，只要 $f(x, y)$ 乘上 $(-1)^{x+y}$ 因子进行傅里叶变换即可实现。



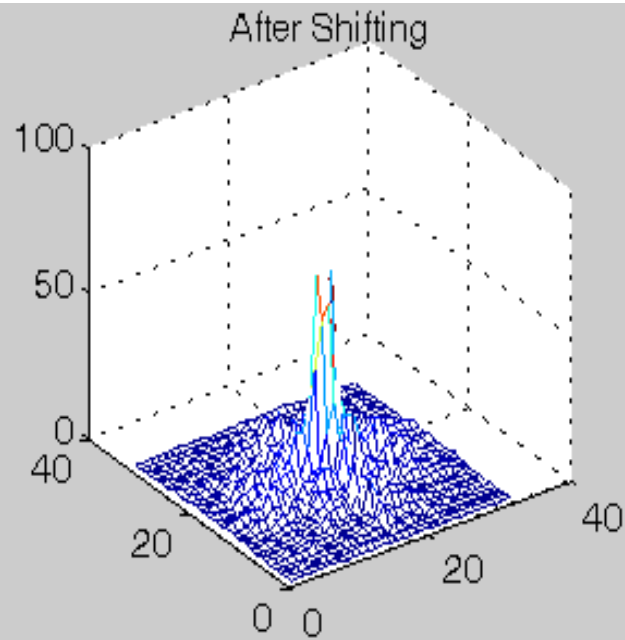
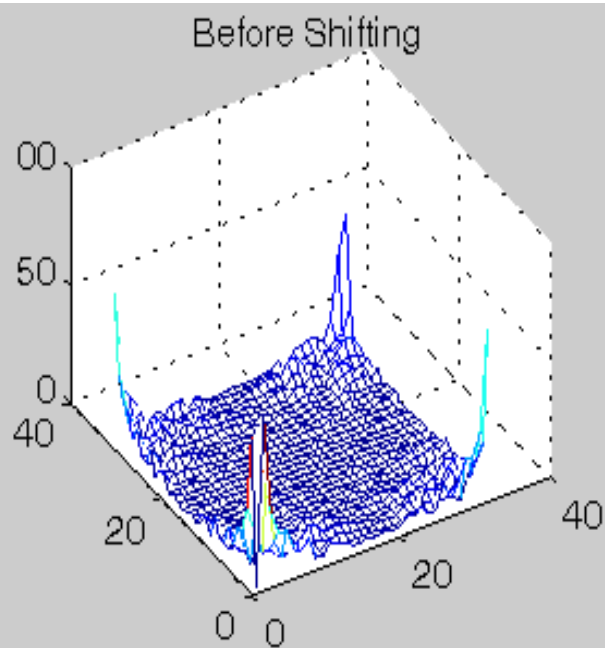
(a)



(b)



(c)



基本性质

- 周期性

若离散的傅里叶变换和它的逆变换周期为 N ，则：

$$F(u, v) = F(u + aN, v + bN)$$

$$f(x, y) = f(x + aN, y + bN)$$

其中， $a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

周期性说明 $F(u, v)$ 和 $f(x, y)$ 都是具有周期为 N 的周期性重复离散函数。即当 u 和 v 取无限组整数值时， $F(u, v)$ 将出现周期重复性，因此由 $F(u, v)$ 用反变换求 $f(x, y)$ ，只需 $F(u, v)$ 中的一个完整周期即可；空域中，对 $f(x, y)$ 也有类似的性质。

基本性质

- 共轭对称性

若离散的傅里叶变换和它的逆变换周期为 N ，则：

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

其中， $a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

共轭对称性说明变换后的幅值是以原点为中心对称，利用此特性，在求一个周期内的值时，只需求出半个周期，另半个周期也就知道了，这大大地减少了计算量。

基本性质

- 旋转性质

令

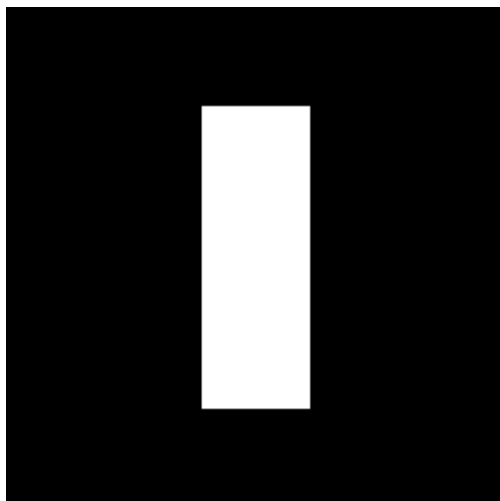
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} u = w \cos \varphi \\ v = w \sin \varphi \end{cases}$$

则 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别变为 $f(r, \theta)$ 和 $F(w, \phi)$ ，在极坐标系中，存在以下变换对：

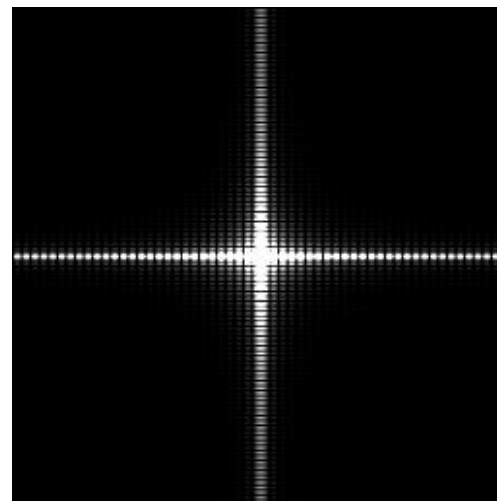
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \varphi + \theta_0)$$

上式表明，如果 $f(x, y)$ 在空间域中旋转 θ_0 角度，则相应的傅里叶变换 $F(u, v)$ 在频率域中旋转同样的角度，反之亦然。

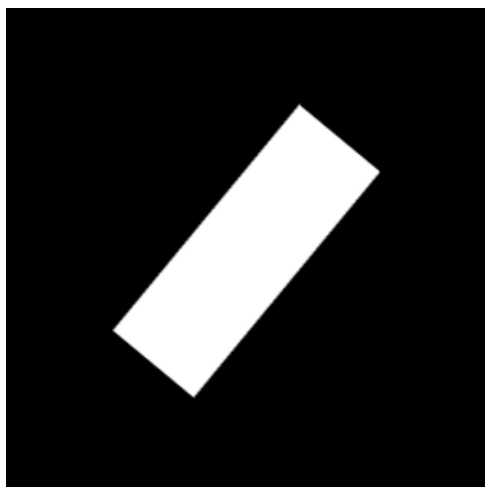
傅里叶变换的旋转性



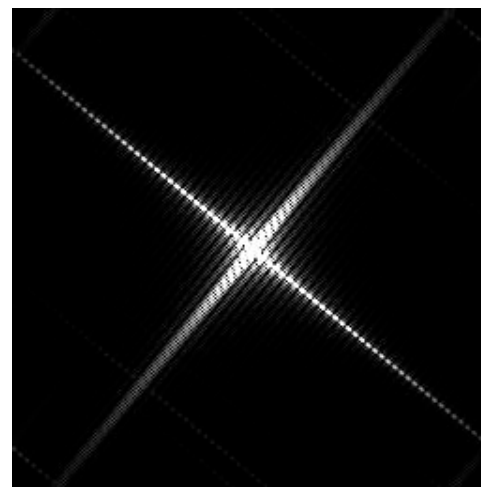
(a) 原图像



(b) 原图像的傅里叶频谱



(c) 旋转后的图像



(d) 旋转后图像的傅里叶频谱

基本性质

- 平均值

二维离散函数 $f(x, y)$ 的平均值定义为：

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

可知

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

对比以上两式，可得

$$\bar{f}(x, y) = F(0,0)$$

这说明 $f(x, y)$ 的平均值等于其傅里叶变换 $F(u, v)$ 在频率原点的值 $F(0,0)$ 。

平均值

- 例题

已知图像矩阵为：

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

请验证图像的平均值与图像的离散傅里叶变换之间的关系。

平均值

- 例题解答

- 例题

已知图像矩阵为：

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

请验证图像的平均值与图像的离散傅里叶变换之间的关系。

应用离散傅里叶变换公式：

$$F(0,0) = \frac{1}{4 \times 4} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f(i, j) = \frac{1}{4}$$

而图像的平均值 $\bar{f}$ 则为：

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f(i, j) = \frac{1}{4}$$

基本性质

- 卷积定理

记两个绝对可积函数为 f 和 g ，则两个函数的卷积(记号“ $*$ ”)定义为

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

其二维卷积定理可由下面关系表示：

设 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$, $g(x, y) \Leftrightarrow G(u, v)$, 则

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$

卷积

- 它表明两个二维连续函数在空间域中的卷积可用求其相应的两个傅里叶变换乘积的逆变换而求得。反之，在频域中的卷积可用在空间域中乘积的傅里叶变换而得。
- 应用卷积定理的优点是避免了直接计算卷积的麻烦，它只需先计算出各自的频谱，然后相乘，再求其反变换，即可得卷积。
- 对于二维离散函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ ，同样可应用上述卷积定理。
- 如果把 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 看作是大小分别为 $A \times B$ 和 $C \times D$ 的离散数列，由于离散卷积的应用主要是逼近它的连续卷积，为考虑二维离散卷积结果与它对应的连续卷积结果的一致性，必须在 x 和 y 方向上扩展这些数列为某个周期 M 和 N ，其数值为：

$$M \geq A + C - 1$$

$$N \geq B + D - 1$$

二维离散卷积

- 利用增补0的方法进行周期延拓后的 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有下列形式：

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1, \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1, \quad B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C-1, \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1, \quad D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

- 二维离散卷积定义为：

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x-m, y-n)$$

其中， $x=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维离散卷积

- 设 $f_e(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$, $g_e(x, y) \Leftrightarrow G(u, v)$

则二维离散卷积定理可由下面关系表示：

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

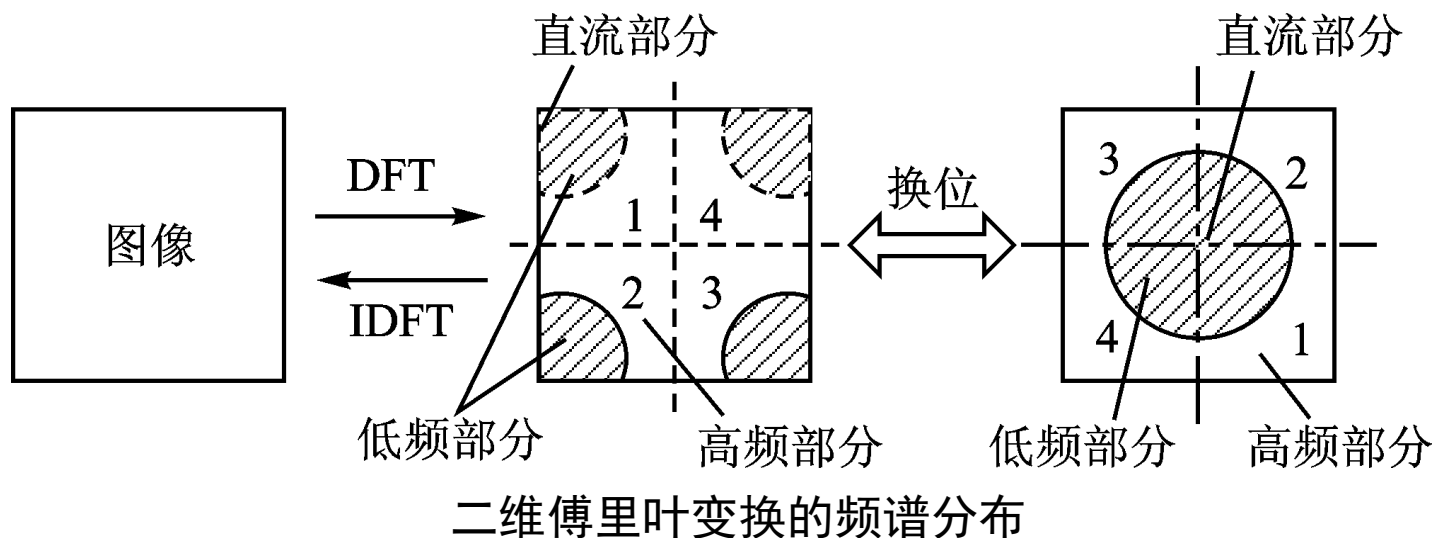
$$f_e(x, y)g_e(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n)g_e(x-m, y-n)$$

其中， $x=0,1,2, \dots, M-1$ ； $y=0,1,2, \dots, N-1$ 。

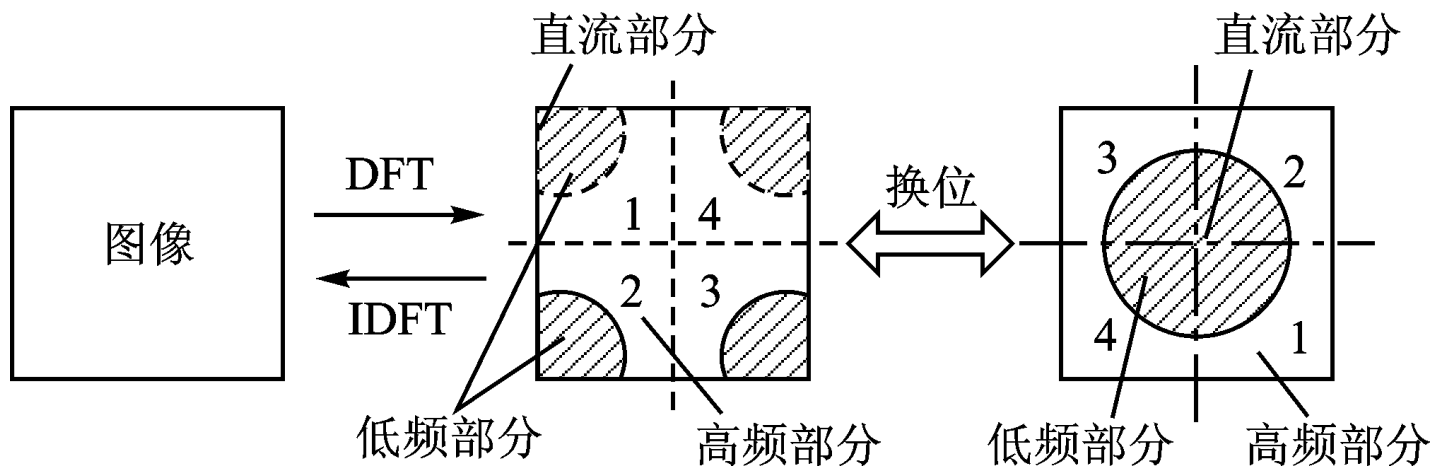
数字图像傅里叶变换的频谱分布

- 数字图像的二维离散傅里叶变换所得结果的频率成分如下图所示，



左上角为直流成分，变换结果的四个角的周围对应于低频成分，中央部位对应于高频部分。

数字图像傅里叶变换的频谱分布



二维傅里叶变换的频谱分布

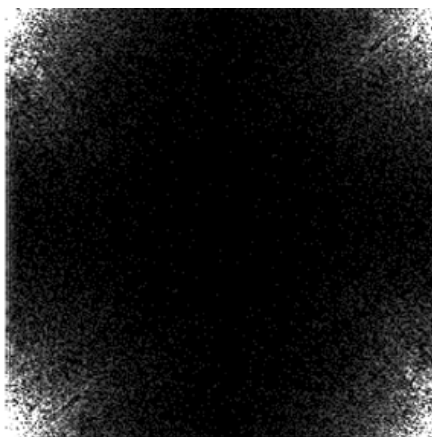
为了便于观察谱的分布，使直流成分出现在窗口的中央，可采用图示的换位方法，根据傅里叶频率位移的性质，只需要用 $f(x, y)$ 乘上 $(-1)^{x+y}$ 因子进行傅里叶变换即可实现，变换后的坐标原点移动到了窗口中心，围绕坐标中心的是低频，向外是高频。

数字图像傅里叶变换的频谱分布

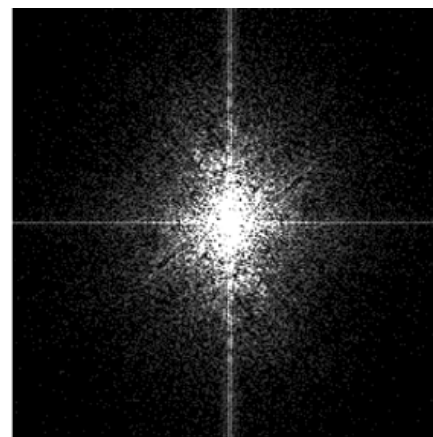
- 右图给出了二维离散傅里叶变换的频率位移特性示例。
- 围绕坐标中心的是低频，向外是高频，频谱由中心向周边放射，而且各行各列的谱对中心点是共轭对称的。
- 利用这个特性，如果在数据存储和传输时，仅存储和传输它们中的一部分，进行逆变换恢复原图像前，按照对称性补充另一部分数据，就可达到数据压缩的目的。



(a) 原图像



(b) 傅里叶谱



(c) 原点移到中心的谱

数字图像傅里叶变换的统计分布

- 傅里叶变换后的零频分量 $F(0,0)$ ，也称作直流分量，根据公式

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

它反映了原始图像的平均亮度。

- 图像灰度变化缓慢的区域，对应它变换后的低频分量部分；
图像灰度呈阶跃变化的区域，对应变换后的高频分量部分。
除颗粒噪音外，图像细节的边缘、轮廓处都是灰度变化突变区域，它们都具有变换后的高频分量特征。

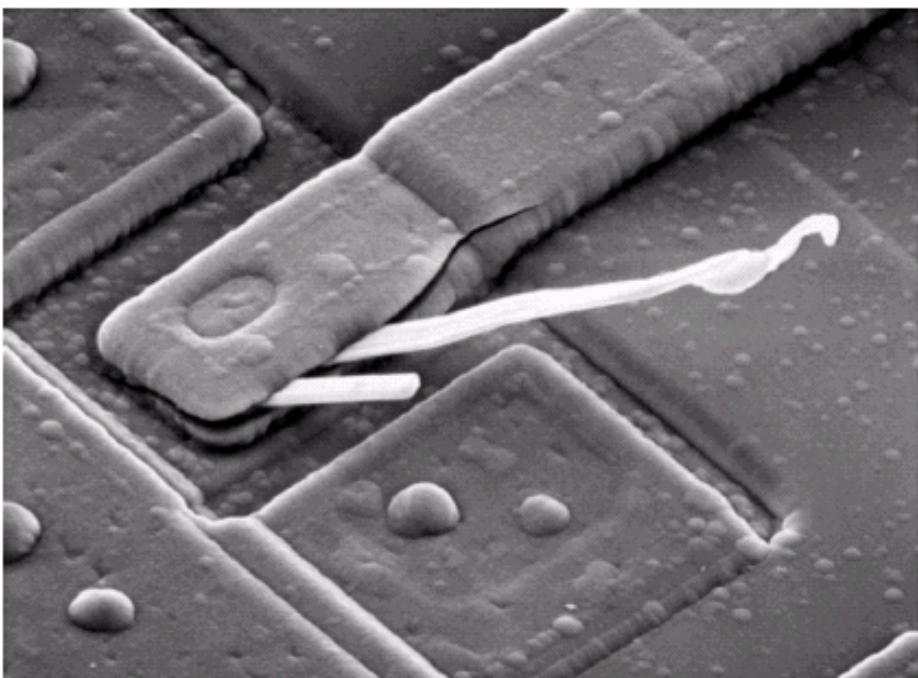
频率域滤波

- 频率域的基本性质

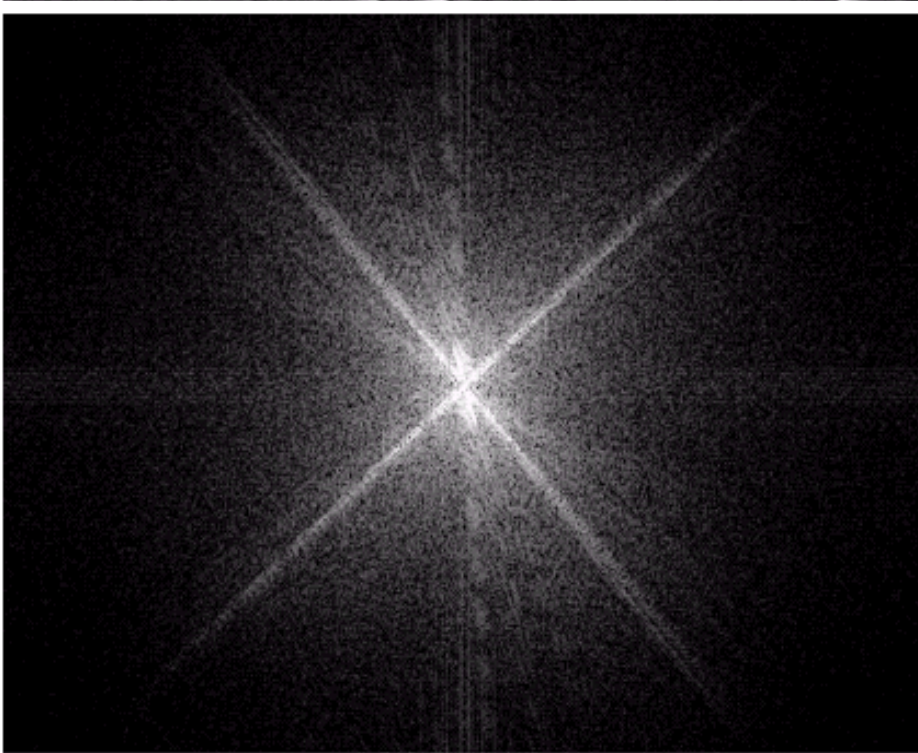
每个 $F(u, v)$ 项包含了被指数项修正的 $f(x, y)$ 所有值：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- 直观上将傅里叶变换和图像中的亮度变化联系起来并不困难
 - 直流分量 $F(0,0)$ 对应一幅图像的平均灰度；
 - 低频部分对应图像缓慢变化的分量；
 - 高频部分对应图像边缘和灰度级突变的部分。



图为一幅集成电路的扫描电子显微镜 (SEM) 图像，放大将近2500倍。注意图中 $\pm 45^\circ$ 的强边缘，和两个因热感应不足而产生的白色氧化突起



图是上图的傅里叶频谱，沿着 $\pm 45^\circ$ 方向对应上图边缘突起部分。沿垂直轴偏左部分有垂直分量，由氧化突起的上下黑白边沿形成。

频率域滤波

频率域中滤波步骤：

1. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像来进行中心变化。

$$\mathfrak{F}[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2)$$

2. 由(1)计算图像的DFT，即 $F(u, v)$ ；

3. 用滤波函数 $H(u, v)$ 乘以 $F(u, v)$ 。

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

4. 计算(3)中结果的反DFT。

5. 得到(4)中结果的实部。

6. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以(5)中的结果。

$H(u, v)$ 称为滤波器：抑制某些频率，其他频率不受影响

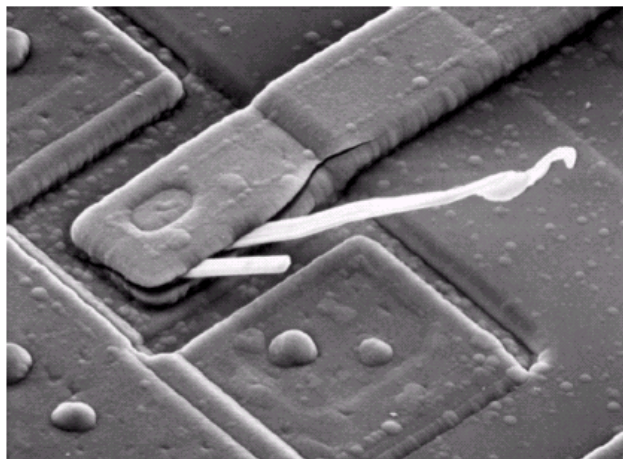
一些基本的滤波器及其性质

- 陷波滤波器：希望图像的平均值为零

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

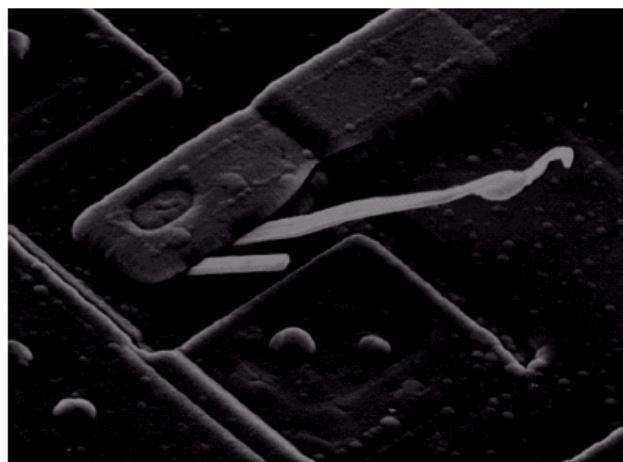
设置 $F(0,0) = 0$ ，保留其它频率成分不变
除原点有凹陷外其它均是常量函数

频率域滤波—陷波滤波器



■ $F(0,0)$ 置零，其他频率成份不变，滤波后图像均值为零。

■ 注意：平均灰度为零，图像中必然会出现负值，而显示无法处理负值。标准显示方式将所有负值当作**0 (黑色)**显示，其它值在此基础上按比例增加



1. 整体平均灰度级降低；
2. 产生边缘突出伴随结果；
3. 可以识别由特定的、局部化频域成分引起的空间图像效果时非常有用

一些基本的滤波器及其性质

- 低通滤波器

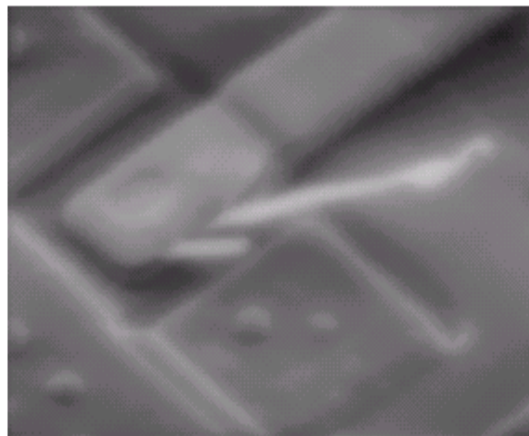
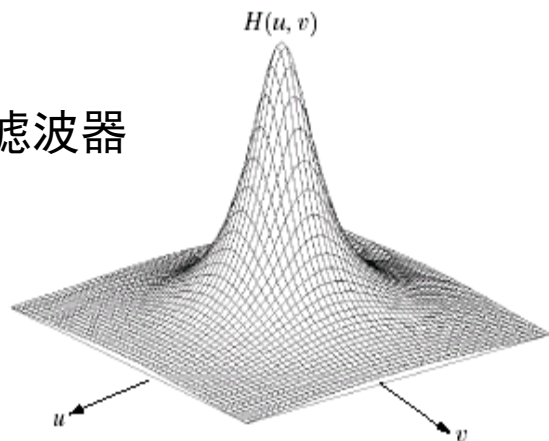
- 使低频通过，高频衰减
- 低频主要决定图像在平滑区域中总体灰度级的显示
- 比原始图像少一些尖锐的细节部分

- 高通滤波器

- 使高频通过，低频衰减
- 高频决定图像细节部分，如边缘和噪声
- 在平滑区域中减少灰度级变化，突出过渡（如边缘）
- 灰度级的细节部分，使图像更加锐化。

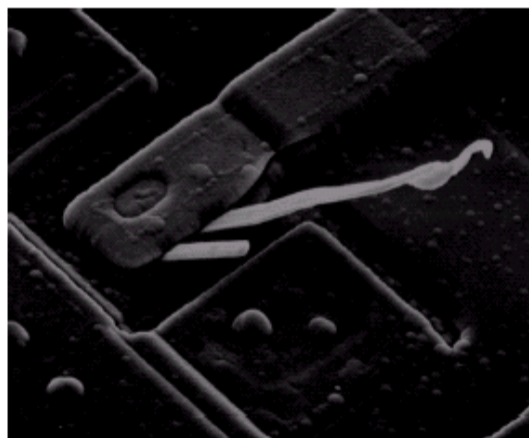
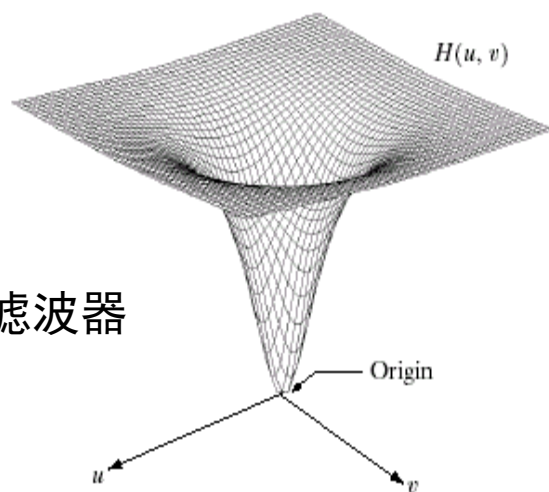
一些基本的滤波器及其性质

低通滤波器



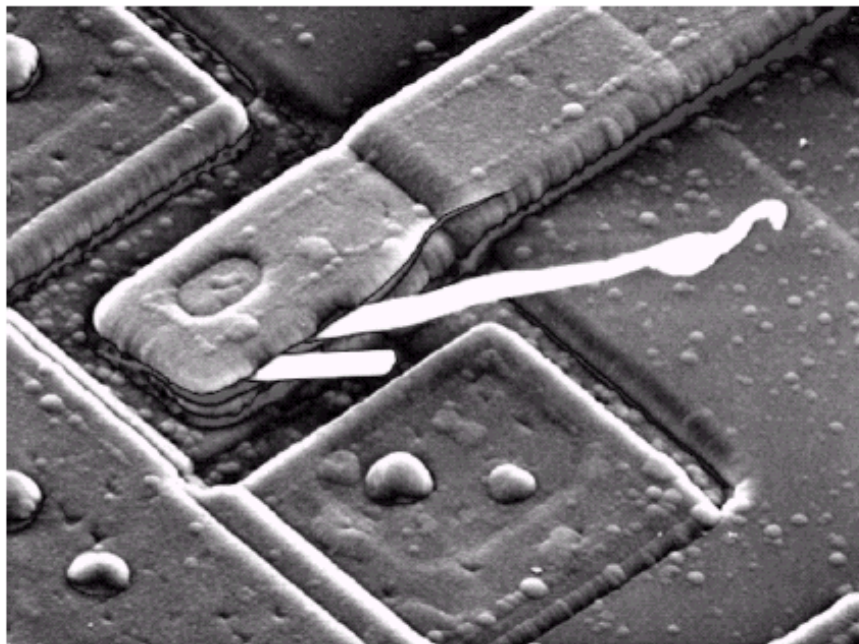
图像被模糊

高通滤波器



锐化 $F(0,0) = 0$,
几乎没有平滑细节

一些基本的滤波器及其性质

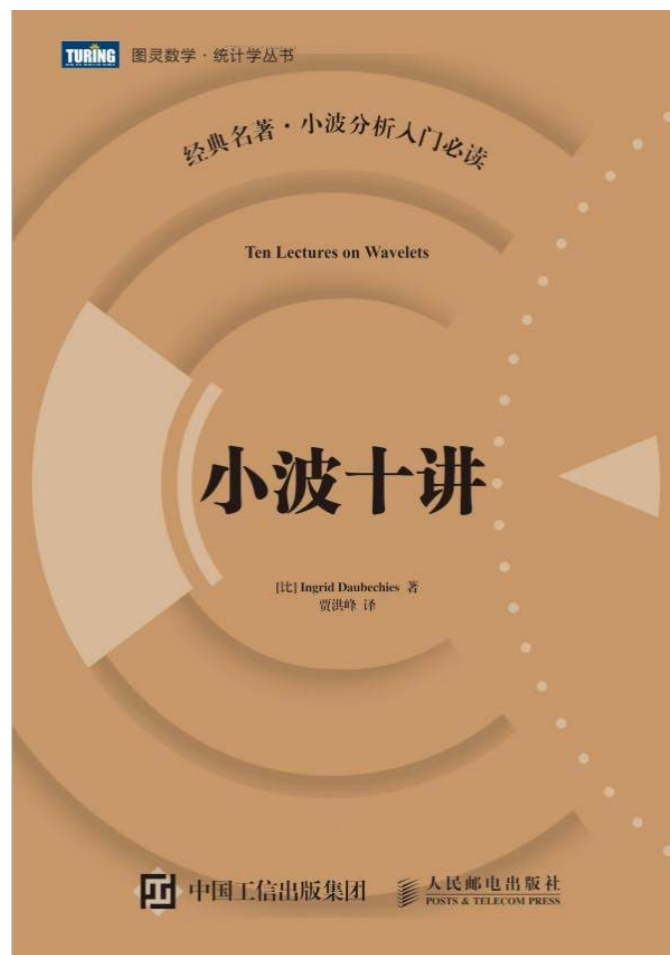


对于高通滤波， $F(0,0)$ 被滤为0，图像几乎没有平滑的灰度细节。为此，**通常在滤波器中加入常数**，以使 $F(0,0)$ 不被完全消除，改进明显。

小波变换

● 发展

- 小波变换的思想是建立在可自动调节长度的视窗函数之上的。
- 起源于20世纪初的Haar的工作。
- 1975年连续小波变换（CWT）的发现及1982年CWT算法的逐步建立后，极大地带动了这一技术的发展。
- 到20世纪90年代，这一种变换方法才变得十分成熟并且得到广泛的应用。



从傅里叶分析到小波分析

- 傅里叶分析存在的问题
 - 傅里叶变换是实域到频域互相转化的工具，实质是把 $f(t)$ 这个波形分解成许多不同频率的正弦波的叠加和。
 - 虽然傅里叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来，能分别从信号的时域和频域观察，但不能把二者有机地结合起来。
 - 信号的时域波形中不包含频域信息，没有局部化分析信号的能力。对于傅里叶谱中的某一频率，不知道这个频率是在什么时候产生的。这样在信号分析中就面临一对最基本的矛盾：

时域和频域的局部化矛盾。

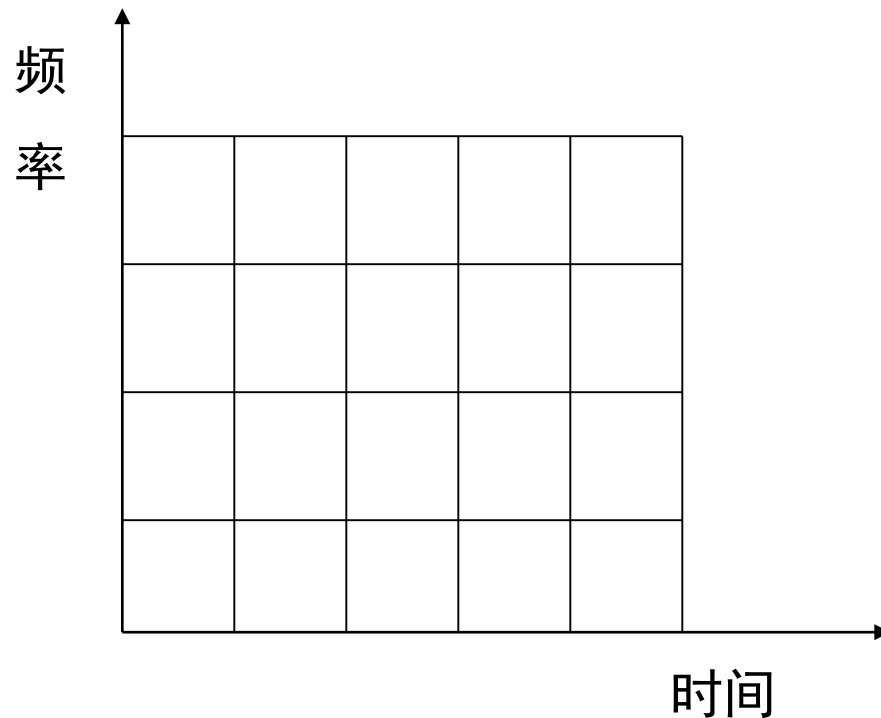
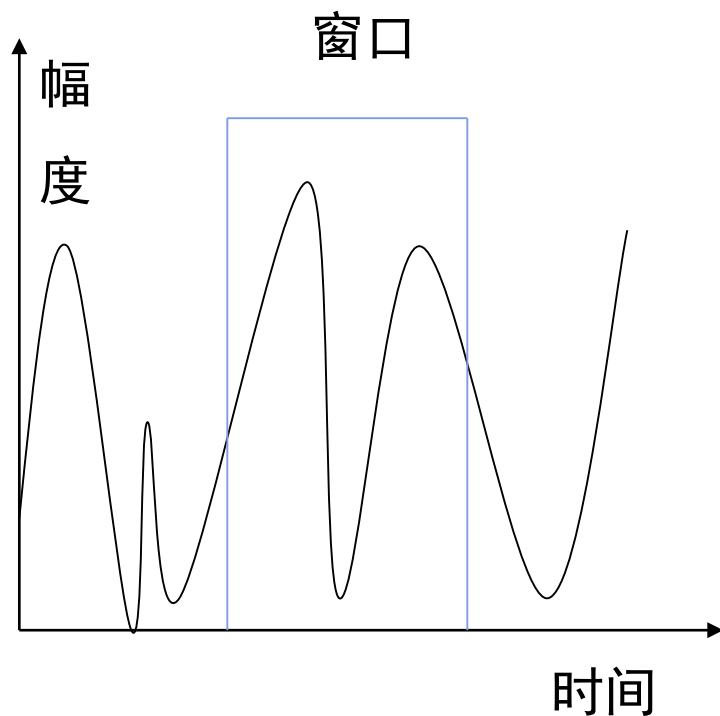
短时傅里叶变换

- Gabor于1946年引入了短时傅里叶变换。
- 其思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用傅里叶变换分析每一个时间间隔，以便确定该时间间隔存在的频率。

$$s(\omega, \tau) = \int_R f(t)g^*(\bar{\omega} - \tau)e^{-i\omega t}dt$$

其中， $g(t)$ 是有紧支集的函数， $f(t)$ 是进入分析的信号。 $e^{-i\omega t}$ 起到频限的作用， $g(t)$ 起到时限的作用，随着时间的变化， $g(t)$ 所确定的“时间窗”在 t 轴上移动，使 $f(t)$ “逐渐”进行分析。

短时傅里叶变换



- **缺陷:** 窗函数确定后, 矩形窗口的形状就确定了, $\omega\tau$ 只能改变窗口在相平面上的位置, 而不能改变窗口的形状。实质上具有单分辨率。

小波分析

- 小波分析方法是一种窗口大小（即窗口面积）固定但其形状可改变，时间窗和频率窗都可改变的**时频局部化方法**。具有对信号的自适应性。
- 小波分析犹如一个具有放大、缩小、平移等功能的数学显微镜，可通过检查其不同“放大”倍数下的信号变化，研究其动态特性。

小波分析

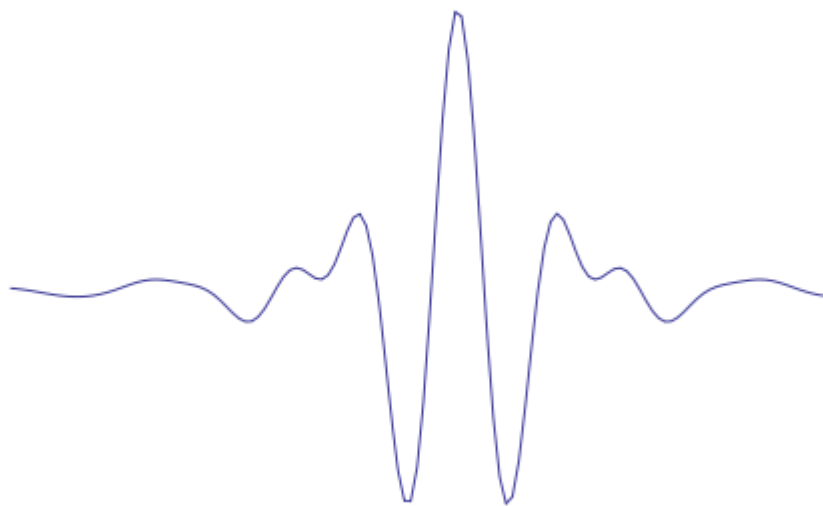
- 小波变换巧妙地利用分辨率分布的非均匀性，较好地解决了时、频分辨率的矛盾。
 - 在低频部分，用高的频率分辨率和较底的时间分辨率（即宽的分析窗口）。
 - 在高频部分，则用具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率（即窄的分析窗口），与时变信号的特性相一致。
- 小波变换是一种满足能量守恒的线性变换，它能将一个信号分解成对时间和频率有独立贡献的成分，而不丢失原有信息。

小波分析

- 小波分析**不一定是正交的**。小波基不唯一，小波函数系的时宽-带宽积很小，且在时间和频率轴上都很集中，也就是说，展开后系数的能量较为集中。
- 利用二维离散小波正交基，可将原始图像在独立的频带与不同的空间方向上（水平、垂直、对角）加以分解
- 小波变换具有一种基于卷积和正交镜像塔形快速算法。
- 小波变换为多频率分析、时-频分析和子带编码，建立了系统的、统一的分析方法。

小波变换的理论基础

- 小波：小的波形，英文为wavelet。
- 所谓“小”是说具有**衰减性**，“波”是说它具有**波动形式**，即其振幅正负相间的振荡形式



小波变换的理论基础

- 小波是一个满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$ 的函数 Ψ 通过平移和伸缩而产生的一个函数簇 $\Psi_{(a,b)}(x)$ ，即

$$\Psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

其中： a —伸缩因子； b —平移因子。通常称 Ψ 为基小波或母小波。

像傅里叶分析一样，小波分析就是把一个信号分解为将母小波经过缩放和平移之后的一系列小波，因此小波是小波变换的基函数。

一维连续小波变换

- $f(t)$ 的连续小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \int_R f(t) \bar{\Psi}_{(a,b)}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_R f(t) \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

其中, $\bar{\Psi}_{(a,b)}(t)$ 是 $\Psi_{(a,b)}(t)$ 的共轭函数。

一维连续小波变换

- 小波变换的反演分式

- 设

$$C_{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$$

则，在 f 的连续点有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{C_{\phi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b) \Psi_{(a,b)}(t) \frac{da db}{a^2}$$

小波变换可以理解为用经过缩放和平移的一系列小波函数代替傅里叶变换的正弦波和余弦波进行傅里叶变换的结果。

重要性质

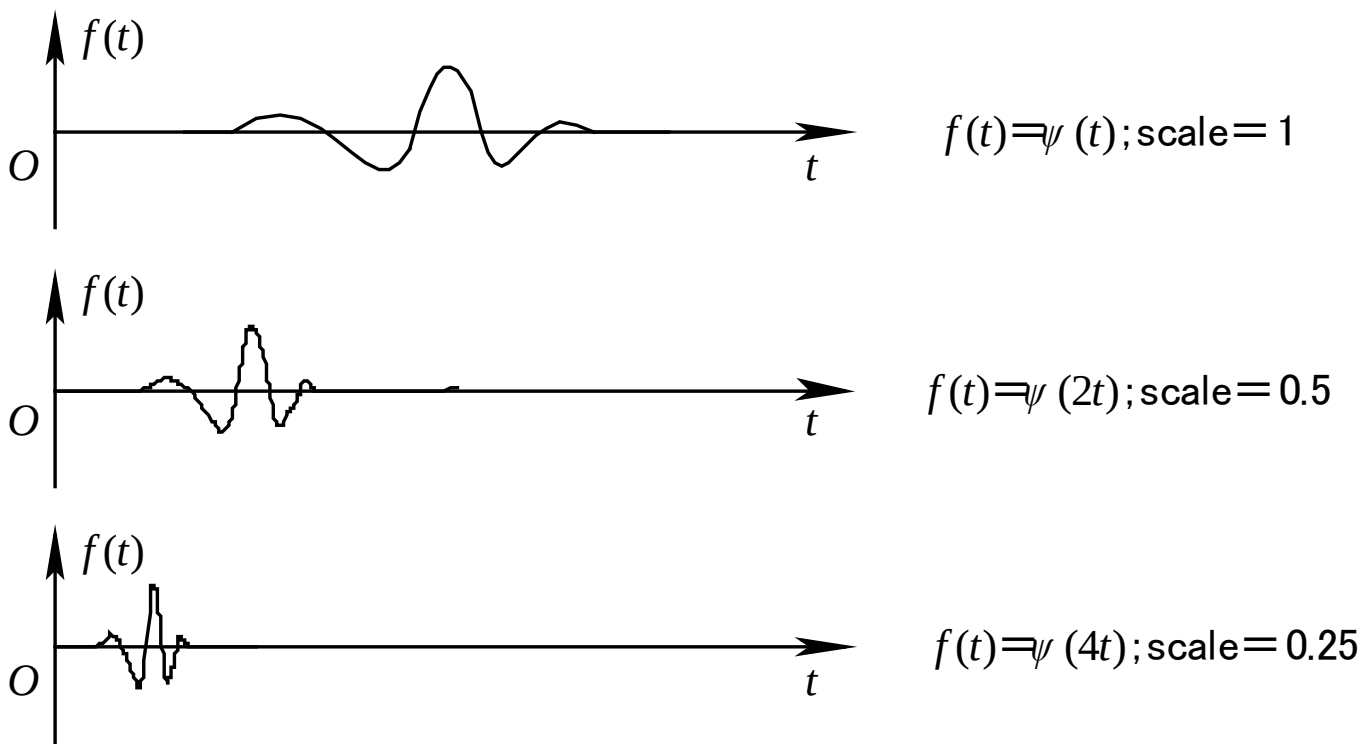
- 缩放性质

- 简单地讲，缩放就是压缩或伸展基本小波。
- 参数 a 的变化不仅改变连续小波的频谱结构，而且也改变其窗口的大小与形状。
- 随着 $|a|$ 的减小， $\Psi_{(a,b)}(t)$ 频谱就向高频方向移动。而 $\Psi_{(a,b)}(t)$ 的宽度则越来越狭小。从而满足了信号频率越高，相应的窗口越小，在时间（或空间）域上的分辨率越高的要求。

重要性质

- 缩放性质

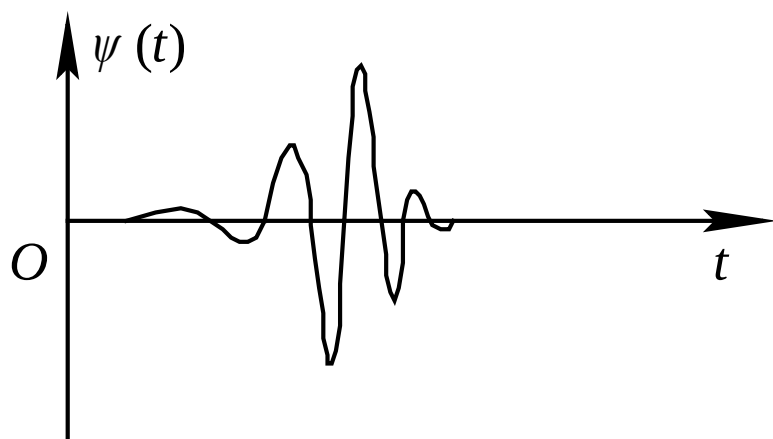
- 随着 $|a|$ 的减小， $\Psi_{(a,b)}(t)$ 频谱就向高频方向移动。而 $\Psi_{(a,b)}(t)$ 的宽度则越来越狭小。



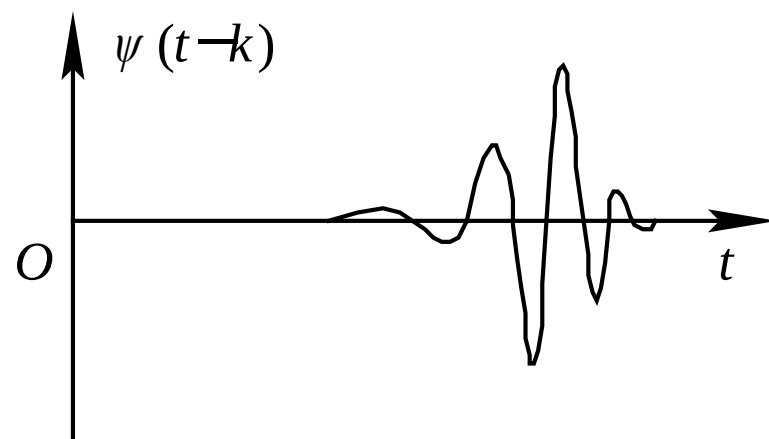
重要性质

- 平移性质

- 平移就是小波的延迟或超前。 b —平移因子，影响窗口在时间轴上的位置。
- 在数学上，函数 $f(t)$ 延迟 k 的表达式为 $f(t - k)$



(a)



(b)

重要性质

- 线性性

- 一个多分量信号的小波变换等于各个分量的小波变换之和。

- 冗余性

- 连续小波变换中存在信息表述的冗余性。
 - 由连续小波变换恢复原信号的重构分式不是唯一的，也就是说，信号 $f(t)$ 的小波变换与小波重构不存在一一对应关系；
 - 而傅里叶变换与傅里叶反变换是一一对应的。
 - 小波变换的核函数即小波函数存在许多可能的选择。

连续小波变换 CWT

- CWT计算主要有如下五步：

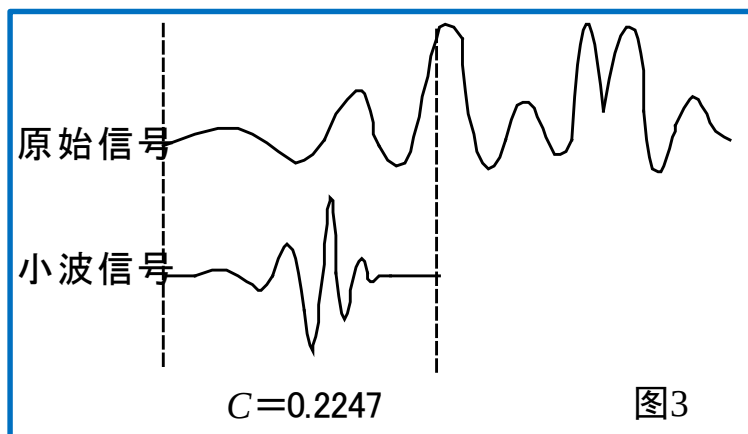
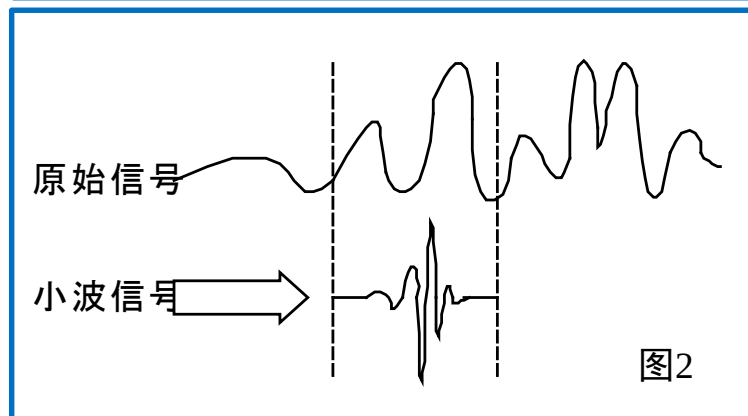
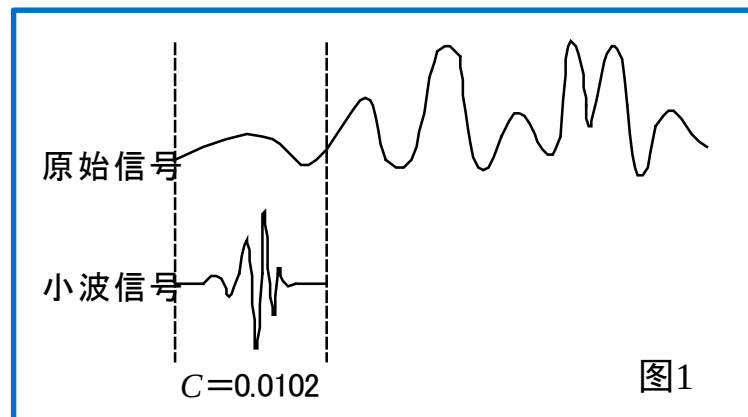
1. 取一个小波， 将其与原始信号的开始一节进行比较。

2. 计算数值 C 。 C 表示小波与所取一节信号的相似程度， 计算结果取决于所选小波的形状， 如图1所示。

3. 向右移动小波， 重复第一步和第二步， 直至覆盖整个信号， 如图2所示。

4. 伸展小波， 重复第一步至第三步， 如图3所示。

5. 对于所有缩放， 重复第一步至第四步。



离散小波变换 DWT

- $f(t)$ 的离散小波变换定义为

$$C_{(m,n)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{(m,n)} f(t) dt$$

其中, $\Psi_{(m,n)}(t) = a^{-\frac{m}{2}} \Psi(a_0^{-m} t - nb_0)$,

这里, $0 < a_0 < 1, b_0 \neq 0$.

离散小波变换 DWT

- 如果这时 $\Psi_{(m,n)}$ 构成空间 $L^2(-\infty, +\infty)$ 的一组规范正交基, 对于任一函数 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ 的反演式为一展开式

$$f(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} C_f(m, n) \Psi_{(m,n)}$$

- 变换中的每一个系数 $C_f(m, n)$ 都是通过输入函数 $f(t)$ 与一个小波基函数 $\Psi_{(m,n)}(t)$ 求内积得到的
- 系数 $C_f(m, n)$ 在某种意义上代表了输入函数 $f(t)$ 与 $\Psi_{(m,n)}(t)$ 之间的相似程度。

离散小波变换

- 双尺度小波变换

- 在每个可能的缩放因子和平移参数下计算小波系数，其计算量相当大，将产生惊人的数据量，而且有许多数据是无用的。
- 如果缩放因子和平移参数都选择为 2^j （ $j > 0$ 且为整数）的倍数，即只选择部分缩放因子和平移参数来进行计算，就会使分析的数据量大大减少。
- 使用这样的缩放因子和平移参数的小波变换称为**双尺度小波变换**，它是离散小波变换的一种形式。
- 通常离散小波变换就是指双尺度小波变换。

离散小波变换

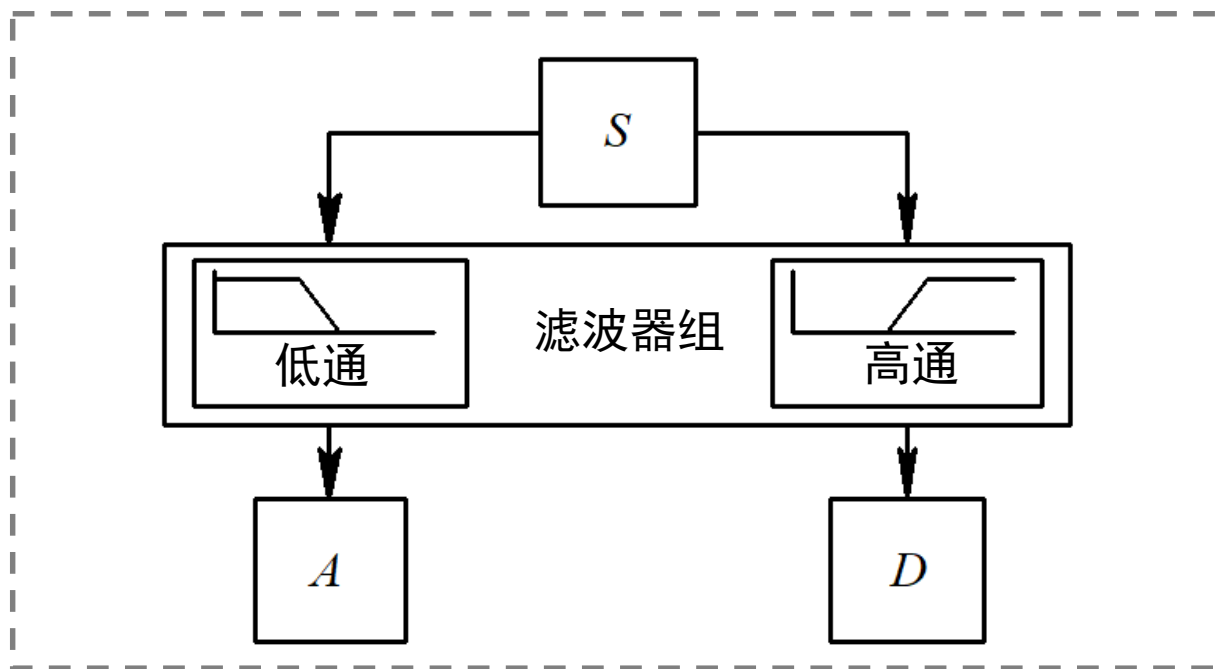
- 滤波器

- 执行离散小波变换的有效方法是使用滤波器， 该方法是Mallat于1988年提出的， 称为Mallat算法。
- 这种方法实际上是一种信号分解的方法， 在数字信号处理中常称为双通道子带编码。
- 用滤波器执行离散小波变换的概念如图所示。 S 表示原始的输入信号， 通过两个互补的滤波器组：
 - 其中一个滤波器为低通滤波器， 通过该滤波器可得到信号的近似值 A (Approximations)；
 - 另一个为高通滤波器， 通过该滤波器可得到信号的细节值 D (Details)。

离散小波变换

- 滤波器

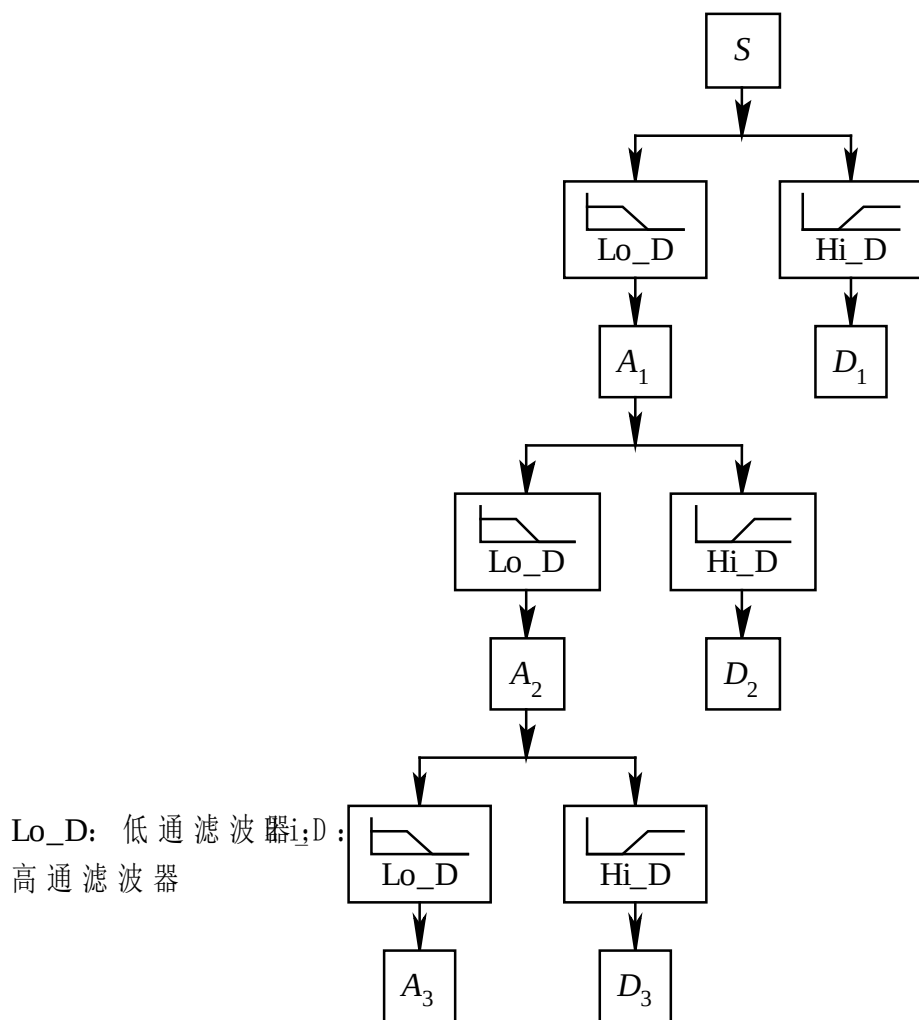
- 低通滤波器：可得到信号的近似值 A (Approximations);
- 高通滤波器：可得到信号的细节值 D (Details)。



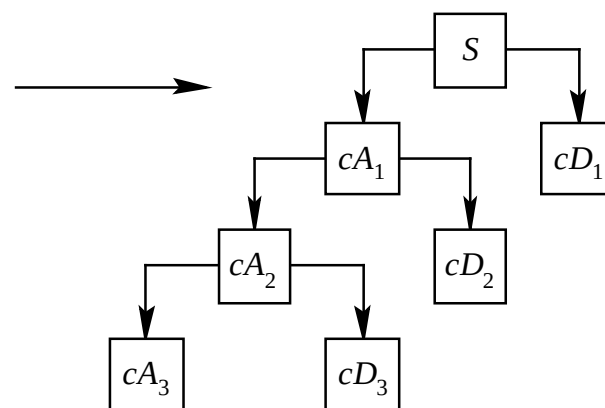
小波分解示意图

离散小波变换

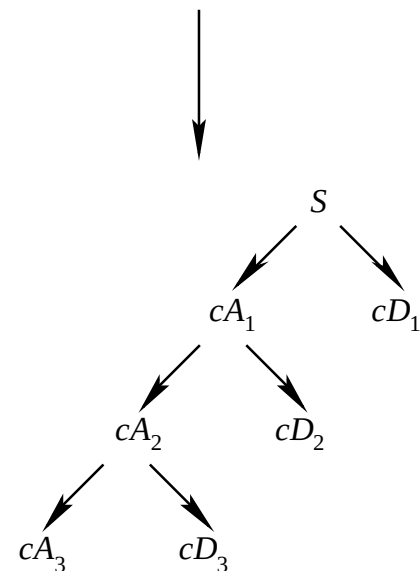
- 原始信号经过一对互补的滤波器组进行的分解称为一级分解，信号的分解过程也可以不断进行下去，也就是说可以进行**多级分解**。
- 如果对信号的高频分量不再分解，而对低频分量进行连续分解，就可以得到信号不同分辨率下的低频分量，这也称为信号的**多分辨率分析**。
- 如此进行下去，就会形成一棵比较大的分解树，称其为**信号的小波分解树**。在实际中，分解的级数取决于要分析的信号数据特征以及用户的具体需要。



(a)



(b)

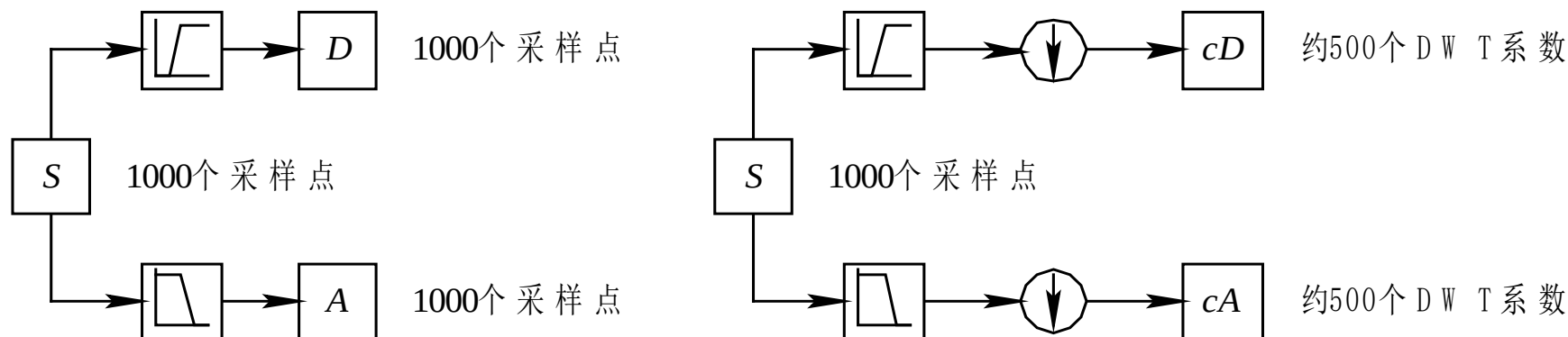


(c)

(a) 信号分解； (b) 小波分数； (c) 小波分解树

离散小波变换

- 对于一个信号，如采用下图所示的方法，理论上产生的数据量将是原始数据的两倍。
- 根据奈奎斯特（Nyquist）采样定理，可用下采样的方法来减少数据量。
 - 即在每个通道内（高通和低通通道）每两个样本数据取一个，便可得到离散小波变换的系数，分别用 cA 和 cD 表示，如图所示。图中 $\downarrow$ 表示下采样。



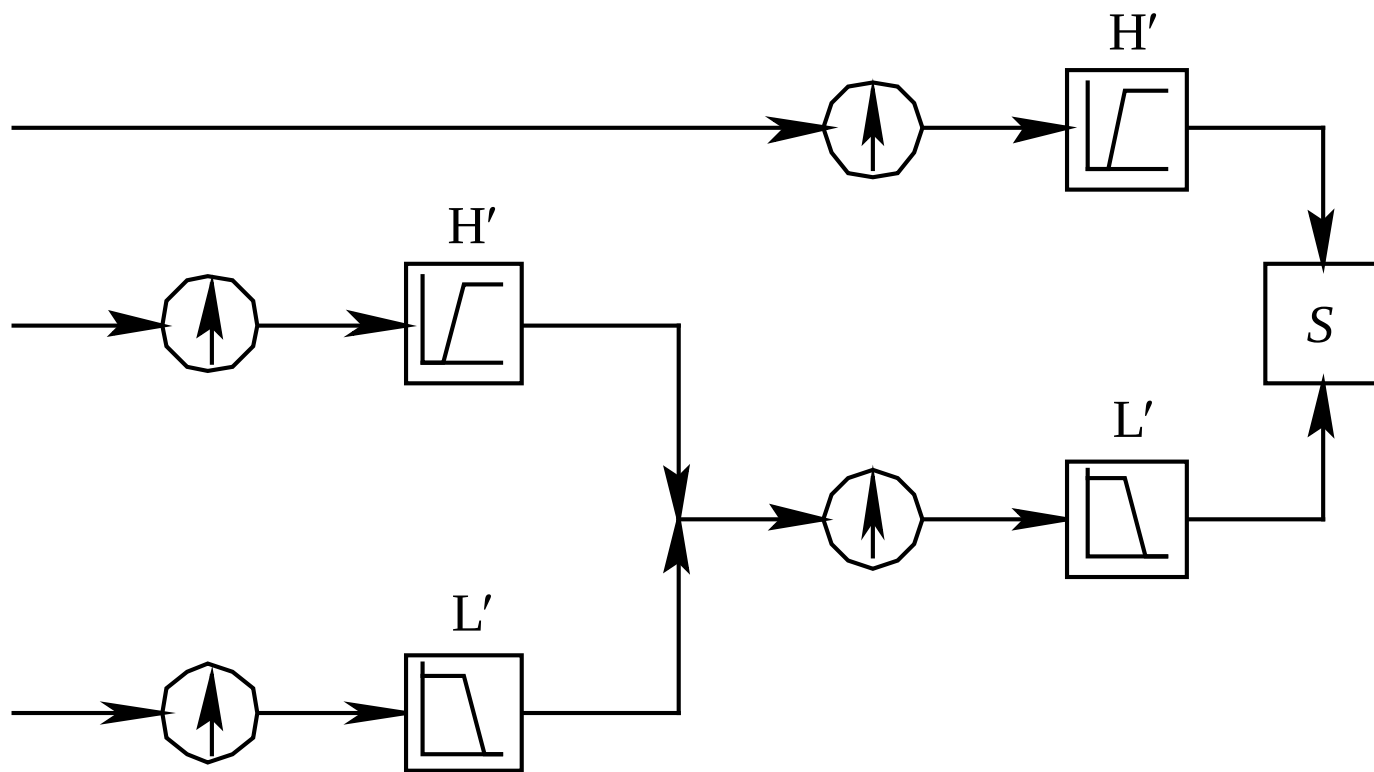
小波分解下采样示意图

小波重构

- 小波重构

- 将信号的小波分解的分量进行处理后，一般还要根据需把信号恢复出来，也就是利用信号的小波分解的系数还原出原始信号，这一过程称为小波重构 (Wavelet Reconstruction)或叫做小波合成 (Wavelet Synthesis)。
- 这一合成过程的数学运算叫做逆离散小波变换 (Inverse Discrete Wavelet Transform, IDWT)。

小波重构

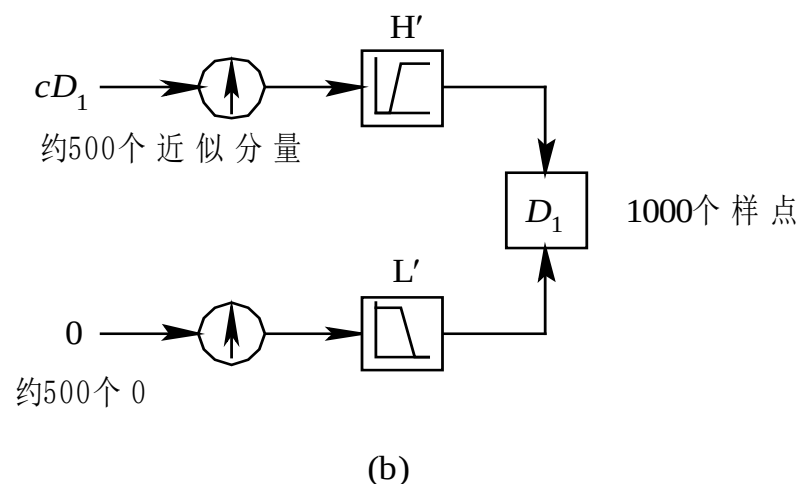
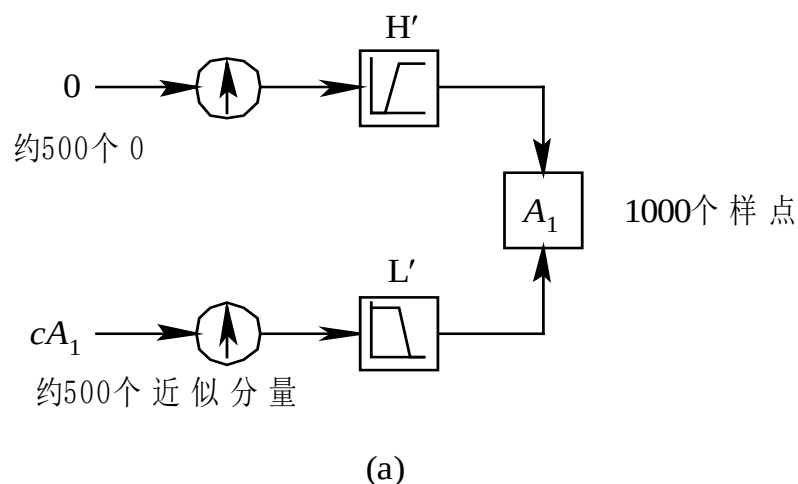


小波重构算法示意图

小波重构

- 多层重构

- 由小波分解的近似系数和细节系数可以重构出原始信号同样，可由近似系数和细节系数分别重构出信号的近似值或细节值。这时只要近似系数或细节系数置为零即可。

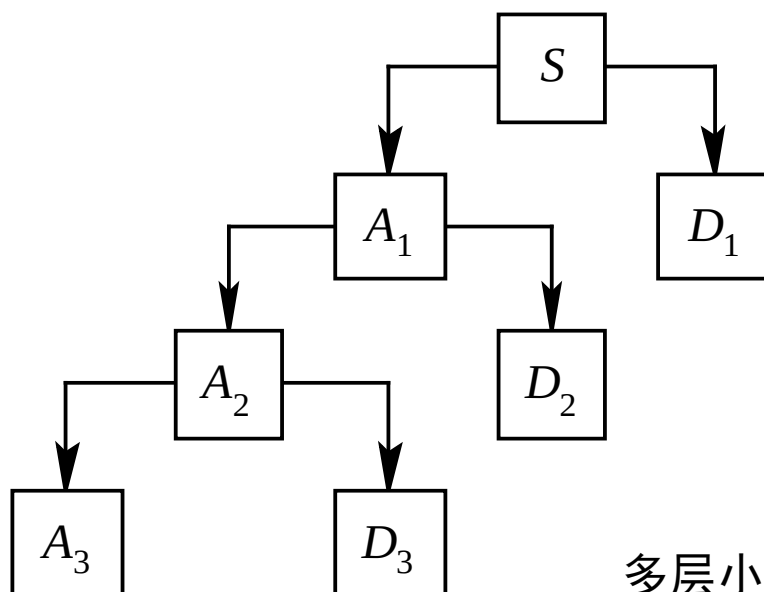


重构近似和细节信号示意图
(a) 重构近似信号； (b) 重构细节信号

小波重构

- 重构近似信号与细节信号

- 在图中，重构出信号的近似值 A_1 与细节值 D_1 之后，则原信号可用 $A_1 + D_1 = S$ 重构出来。
- 对应于信号的多层小波分解，小波的多层重构如下图所示。由图可见重构过程为： $A_3 + D_3 = A_2$ ； $A_2 + D_2 = A_1$ ； $A_1 + D_1 = S$ 。

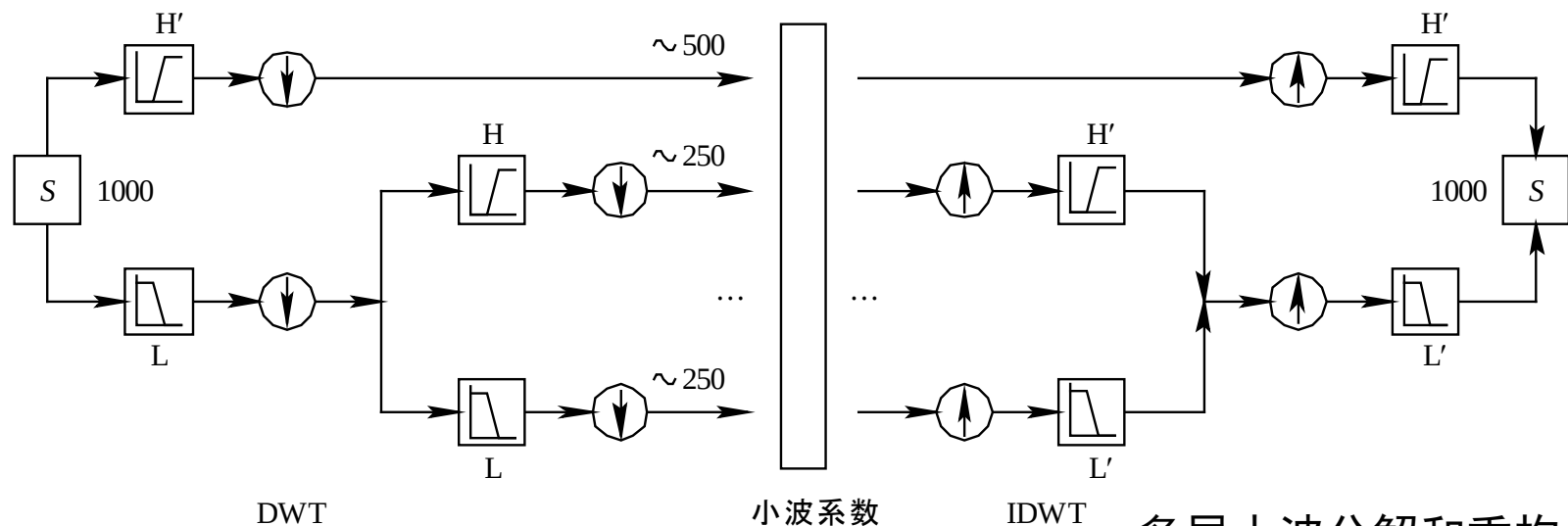


多层小波重构示意图

小波重构

- 重构近似信号与细节信号

- 信号重构中，滤波器的选择非常重要，关系到能否重构出满意的原始信号。
- 低通分解滤波器(L)和高通分解滤波器(H)及重构滤波器组(L' 和 H')构成一个系统，这个系统称为正交镜像滤波器(Quadrature Mirror Filters, QMF)系统，如下图所示。



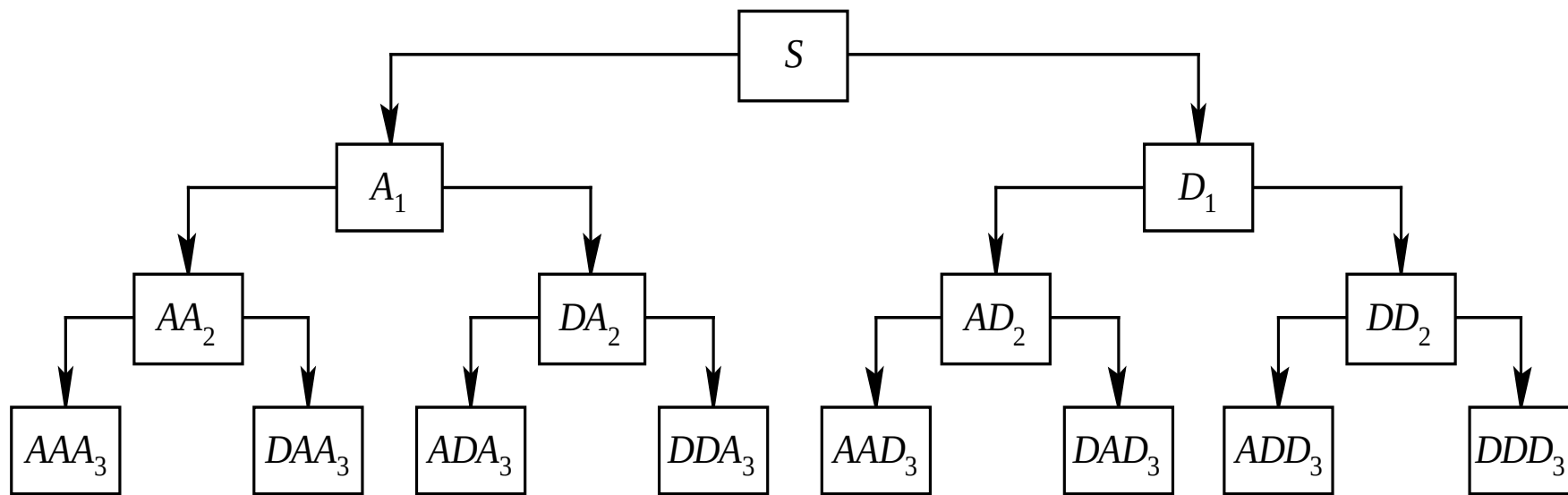
多层小波分解和重构示意图

小波包分析

- 小波分析是将信号分解为近似与细节两部分，近似部分又可以分解成第二层近似与细节，可以这样重复下去。对于一个 N 层分解来说，有 $N + 1$ 个分解信号的途径。
- 而小波包分析的细节与近似部分一样，也可以分解，对于 N 层分解，它产生 $2N$ 个不同的途径。

小波包分析

- 小波包分析对于 N 层分解，它产生 $2N$ 个不同的途径，图是一个小波包分解示意图。



小波包分解示意图

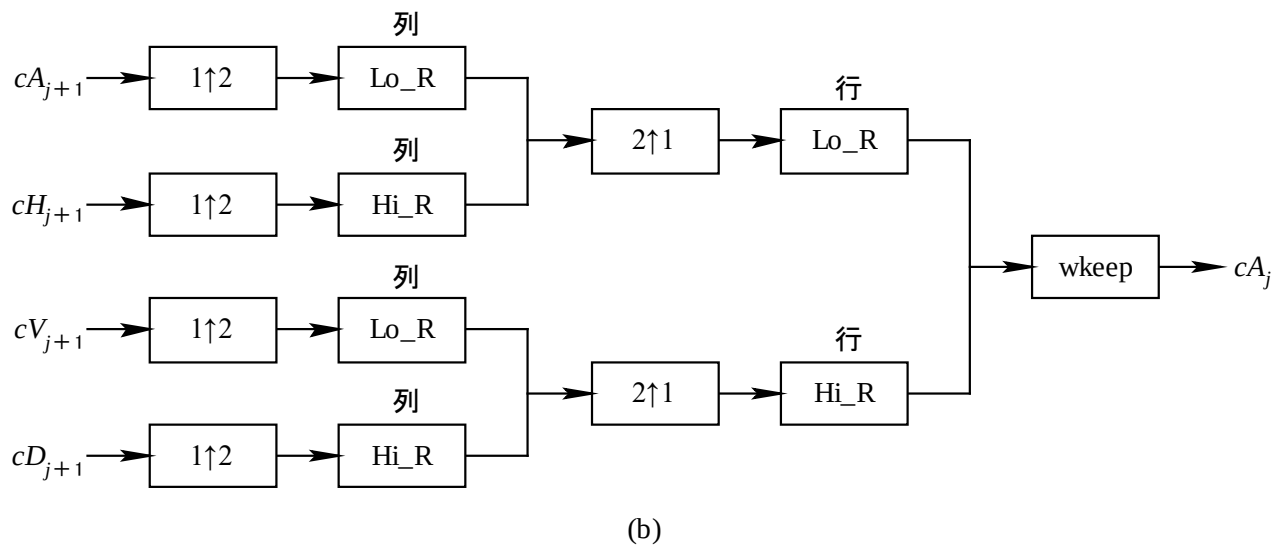
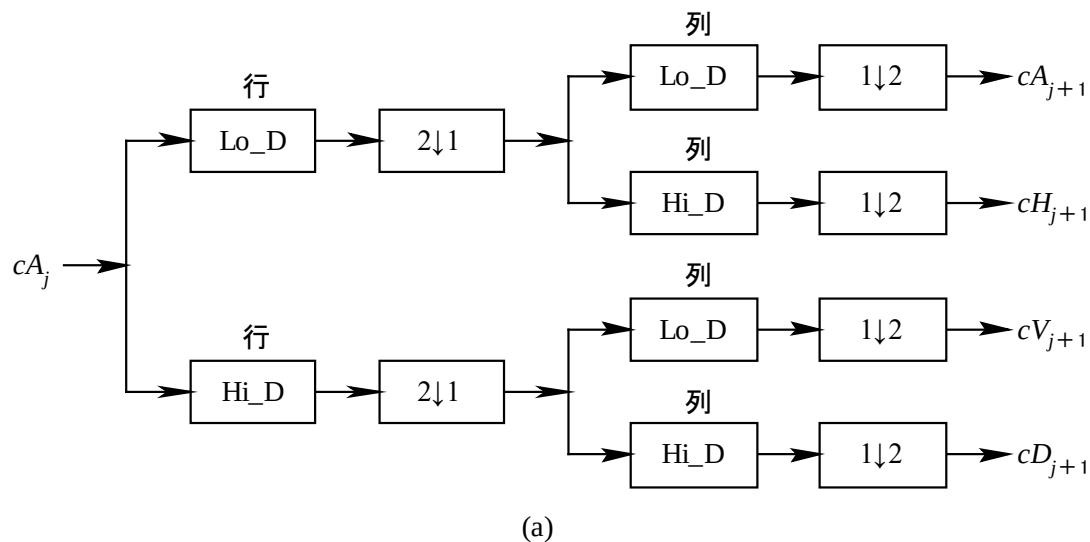
小波包分析

- 小波包分解也可得到一个分解树，称其为小波包分解树(Wavelet Packet Decomposition Tree)。
- 小波包分解树是一个完整的二叉树。
- 小波包分解方法是小波分解的一般化，可为信号分析提供更丰富和更详细的信息。信号 S 可表示为 $AA_2 + ADA_3 + DDA_3 + D_1$ 等。

二维离散小波变换

- 二维离散小波变换是一维离散小波变换的推广，其实质上是**将二维信号在不同尺度上的分解**，得到原始信号的近似值和细节值。
- 由于信号是二维的，因此分解也是二维的。分解的结果为：近似分量 cA 、水平细节分量 cH 、垂直细节分量 cV 和对角细节分量 cD 。

同样也可以利用二维小波分解的结果在不同尺度上重构信号。
二维小波分解和重构过程如图所示。

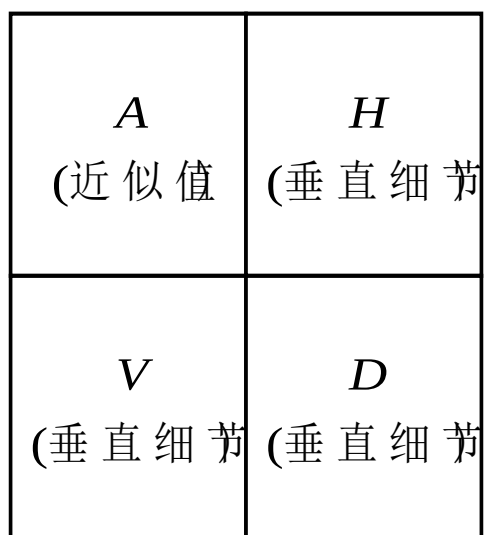


离散小波变换在图像处理中的应用

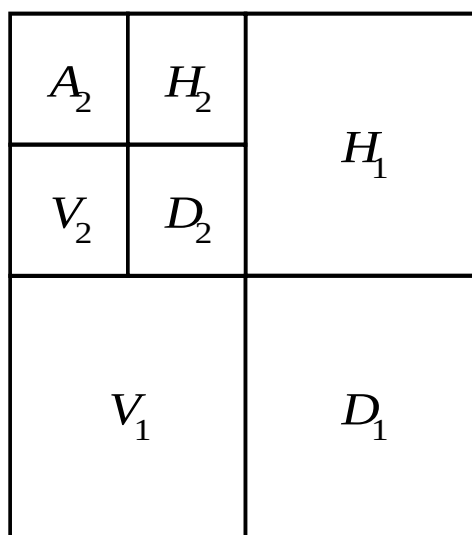
- 用小波变换进行图像分解
 - 使用小波变换完成图像分解的方法很多。例如，均匀分解（Uniform decomposition）、非均匀分解（Non-uniform decomposition）、八带分解（Octave-band decomposition）、小波包分解（Wavelet-packer decomposition）等。
 - 其中八带分解是使用最广的一种分解方法。这种分解方法把低频部分分解成比较窄的频带，而对每一级分解得到的高频部分不再进一步进行分解。

八带分解

- 图(a)为八带分解示意图，用于分解的原始图像采用Matlab提供的预存图像文件woman2.mat，小波基函数为“haar”小波。图(b)是用Matlab的小波工具箱编程进行分解得到的图像。



(a)



(b)



(c)

八带分解示意图

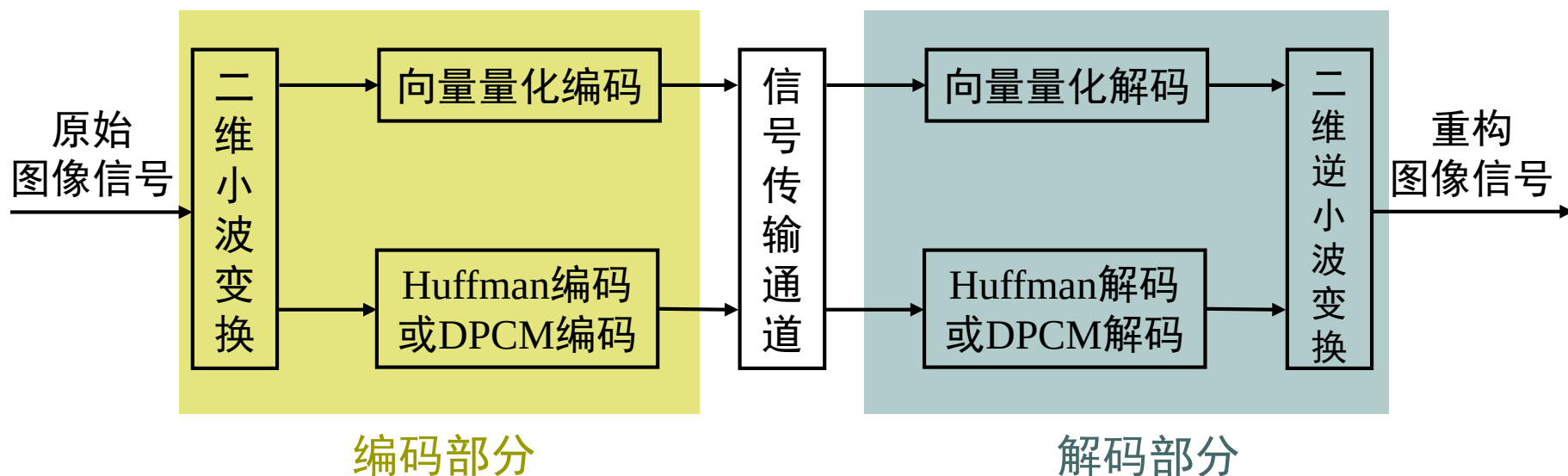
(a) 一次二维DWT； (b) 两次二维DWT； (c) Woman二级分解图

用小波变换进行图像处理

- 对静态二维数字图像，可先对其进行若干次二维DWT变换，将图像信息分解为高频成分H、V和D和低频成分A。
- 对低频部分A，由于它对压缩的结果影响很大，因此可采用无损编码方法，如Huffman、DPCM等；
- 对H、V和D部分，可对不同的层次采用不同策略的向量量化编码方法，这样便可大大减少数据量。
- 图像的解码过程刚好相反。

小波变换编、解码

- 整个编码、解码流程如图所示。



此外，还可以在对A、H、V和D部分编码后加上一个反馈环节，获取误差图像，并对其编码。这样压缩效果会更好。

小波变换图像编码

- 近年来，基于小波变换发展起来很多图像编码技术。
 - 有嵌入式零树小波编码EZW（Embedded Zerotree Wavelet）；
 - 在EZW算法基础上改进的层树分级编码SPIHT（Set Partition In Hierarchical Trees）；
 - 最佳截断嵌入码块编码EBCOT（Embedded Block Coding with Optimized Truncation）等。
 - ISO/IEC JTC1 SC29小组制定的JPEG2000静态图像编码标准中的图像变换技术就采用了离散小波变换。
- 这些编码的最大特点是在不丢失重要信息的同时，能以较高的比率压缩图像数据，并且其算法计算量小。

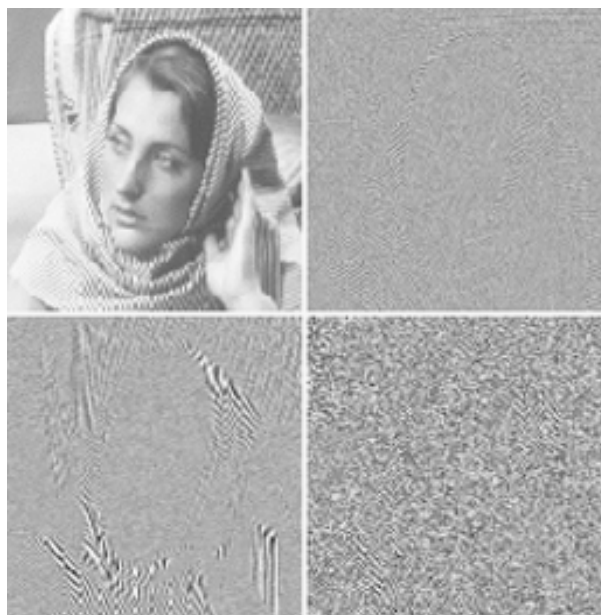
小波分析的应用

- 小波变换在图像压缩中的应用
 - 特点：
 - 压缩比高，压缩速度快；
 - 压缩后能保持信号与图像的特征不变；
 - 在传递中可以抗干扰。
 - 方法
 - 小波包最优基方法；
 - 小波域纹理模型方法；
 - 小波变换零树压缩；
 - 小波变换向量压缩。

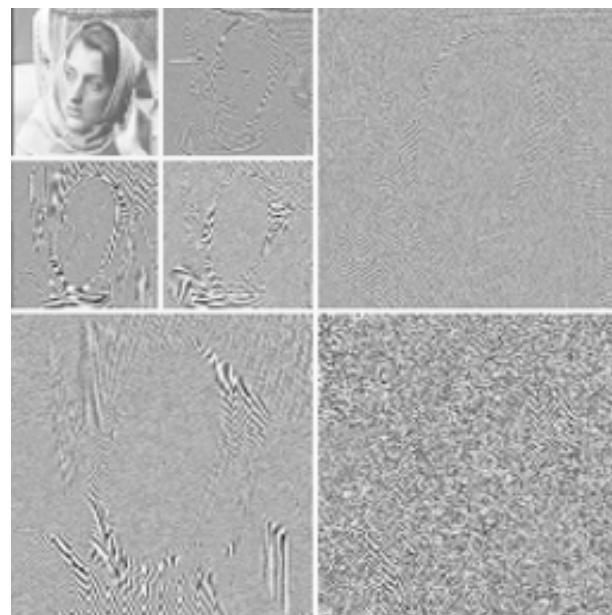
小波变换在图像压缩中



a)



b)



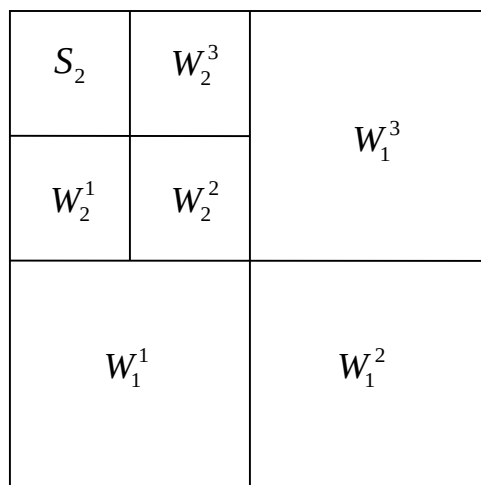
c)

a) 原始灰度图像 b) 一级小波分解后的图像
c) 二级小波分解后的图像

小波变换在图像压缩中的应用

二维小波变换和图像处理

- 二级小波变换后的系数分布图：

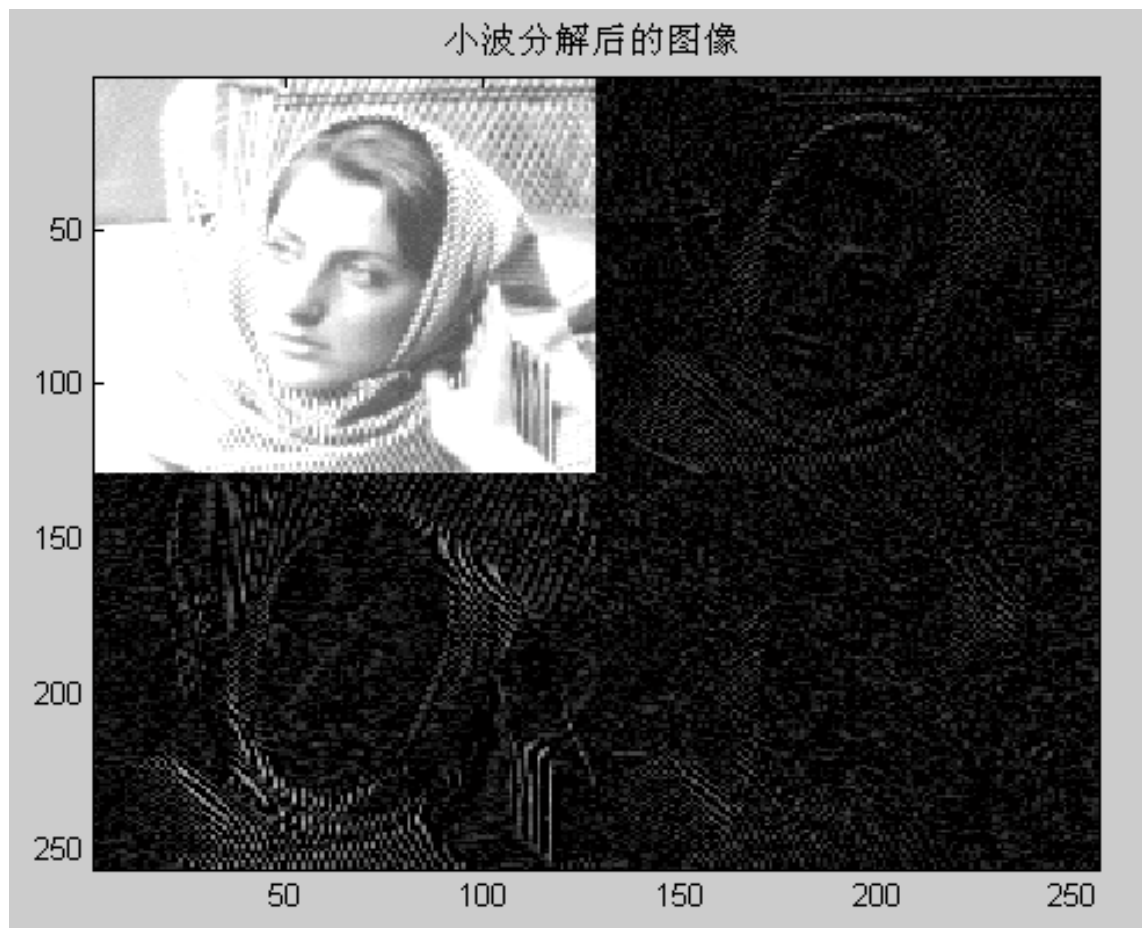


二维小波变换和图像处理

- 二维离散小波的一层分解

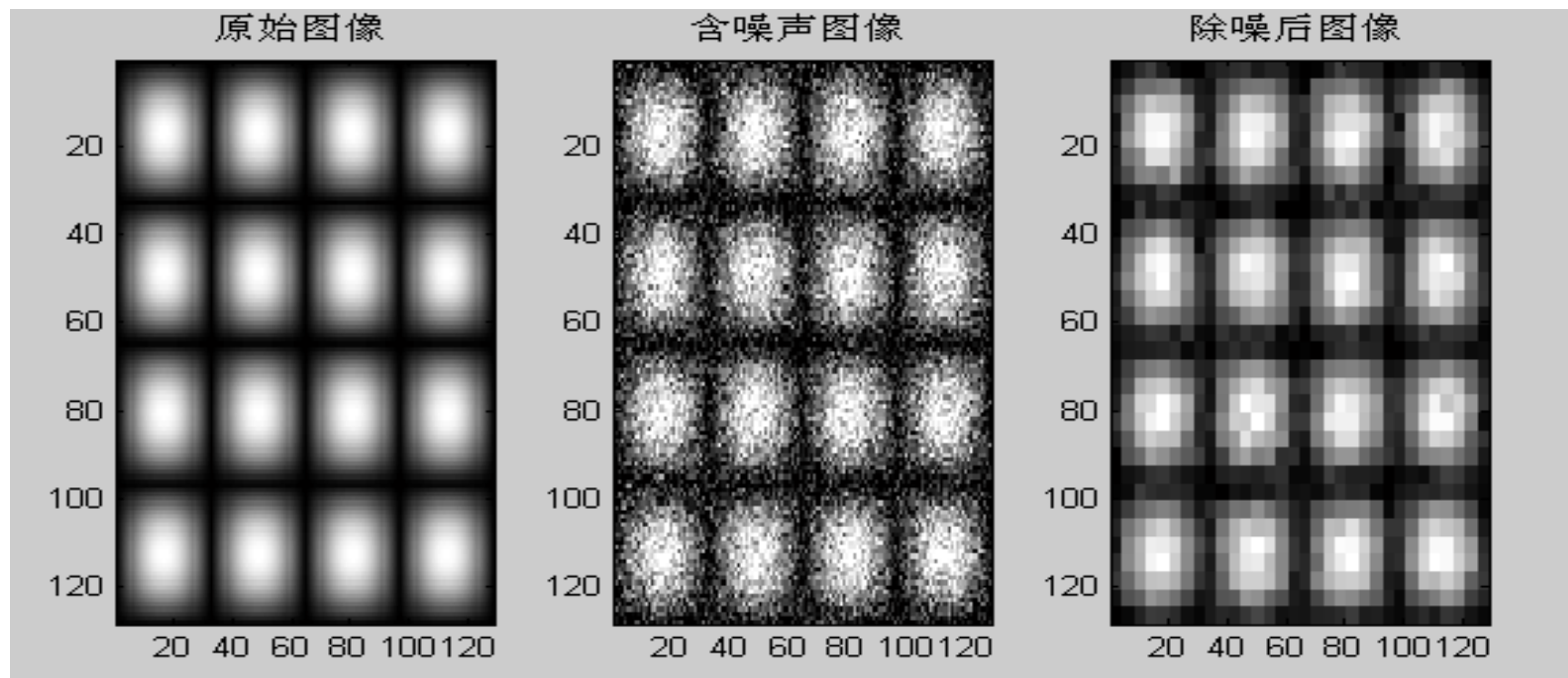


二维小波变换和图像处理



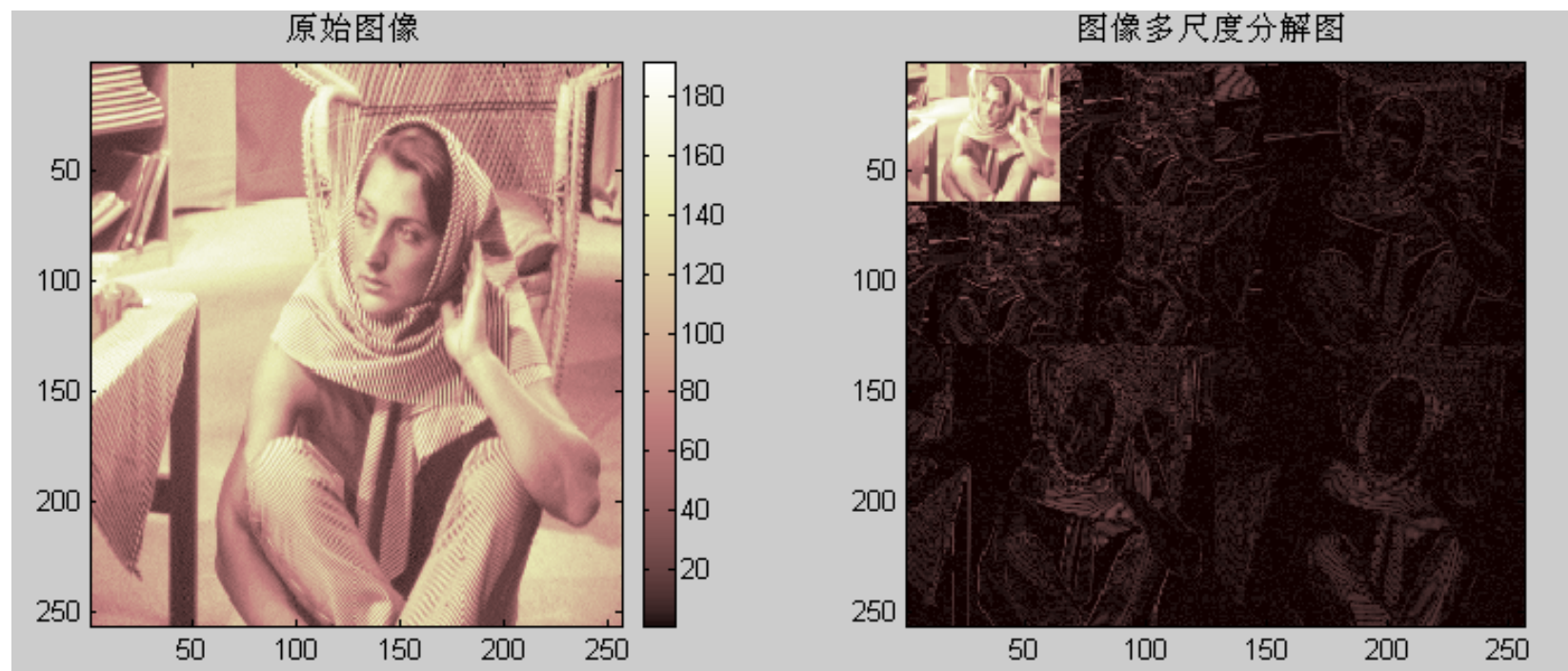
二维小波变换和图像处理

- 利用小波变换对图像进行消除噪声处理

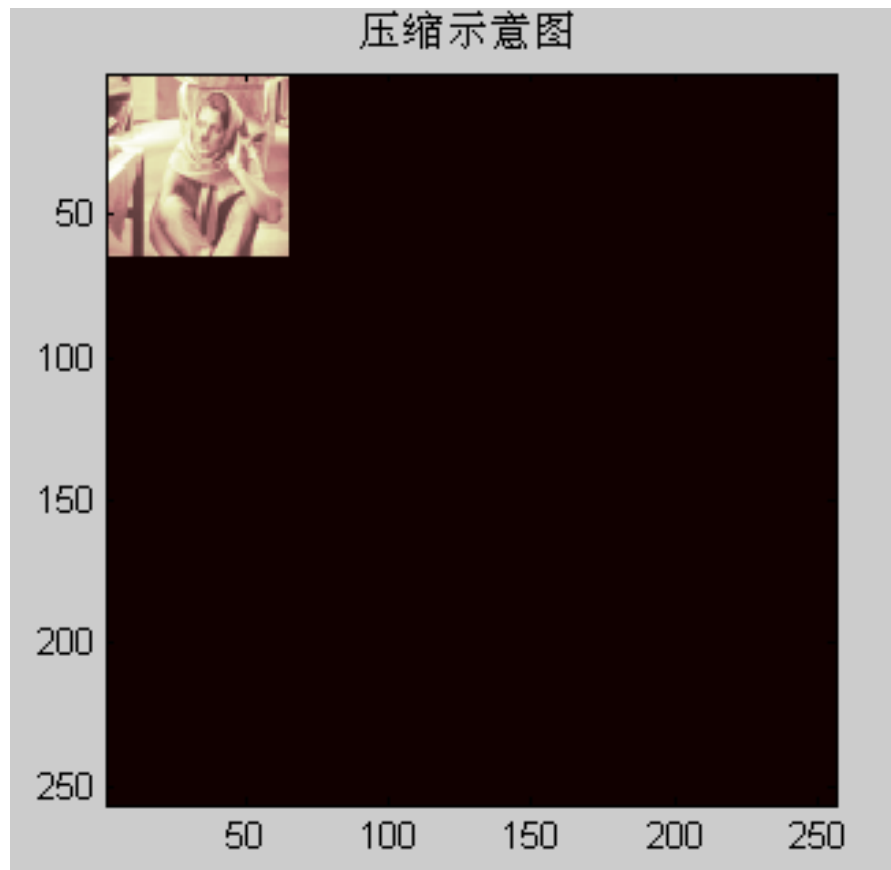


二维小波变换和图像处理

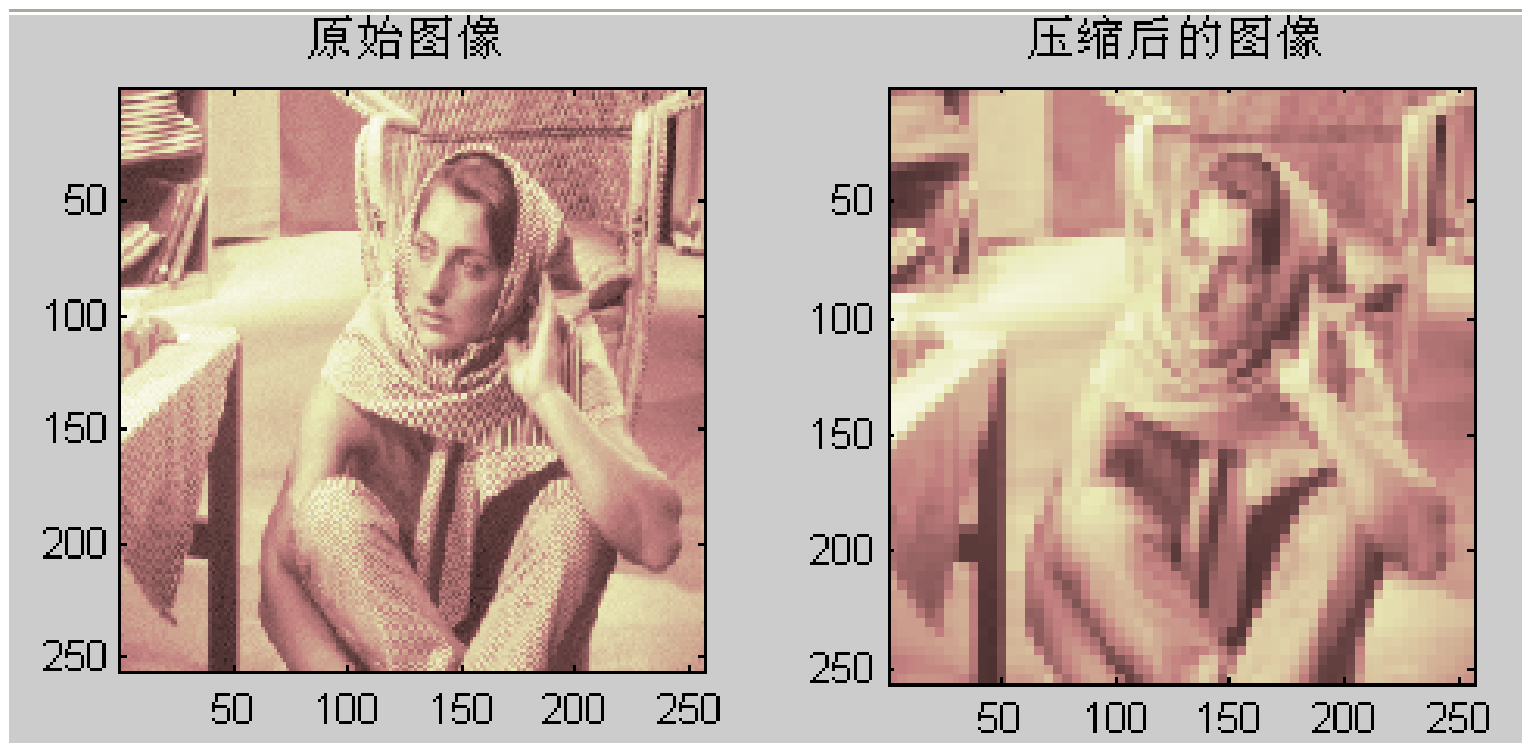
- 利用小波变换对图像进行压缩处理



二维小波变换和图像处理



二维小波变换和图像处理

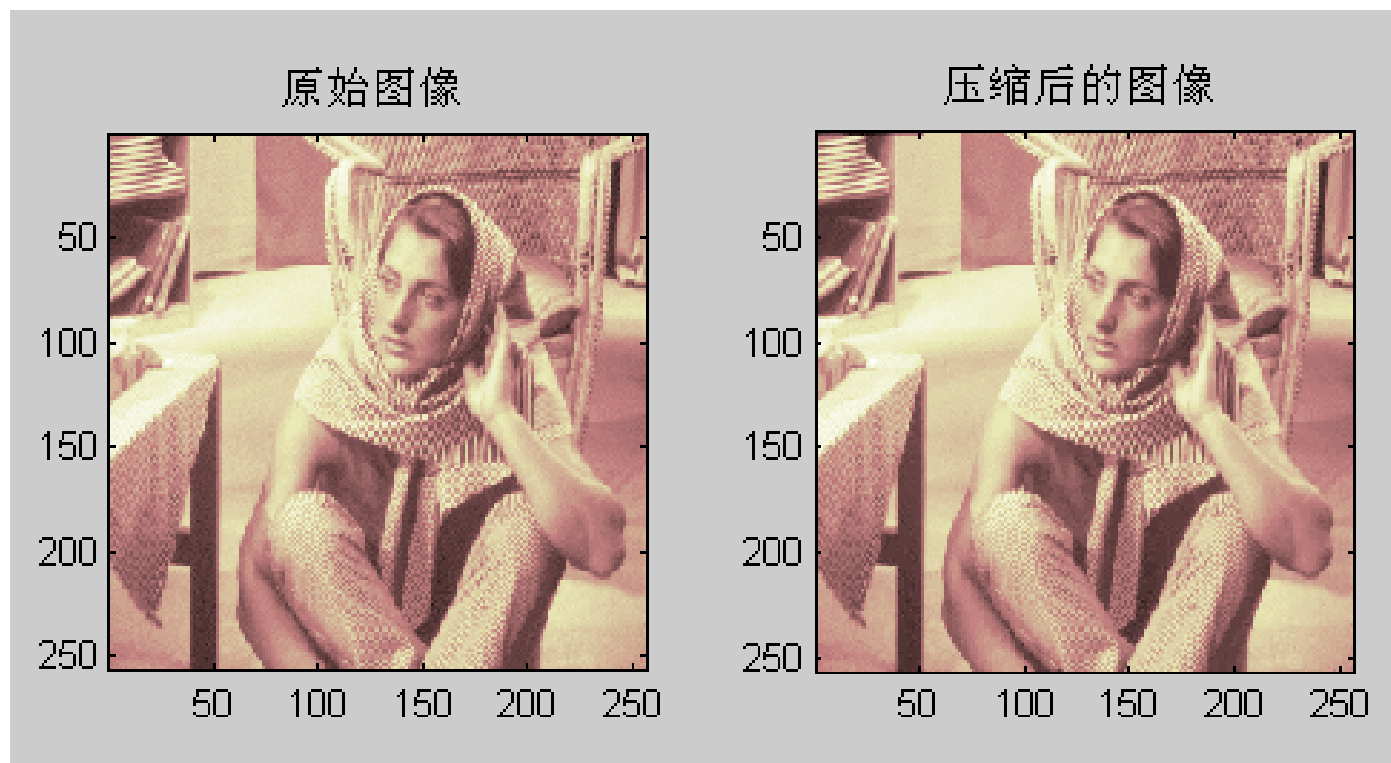


二维小波变换和图像处理

- 采用全局阈值的图像压缩

cA2	cH1>thr	cH2>thr
cV1>thr	cD1>thr	
cV2>thr		cD1>thr

二维小波变换和图像处理



二维小波变换和图像处理

边缘
检测

原图



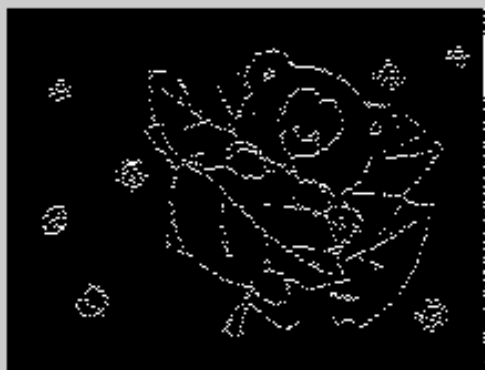
多尺度



0层



1层



2层

