第2章 插值法

张利军
zlj@nju.edu.cn
http://cs.nju.edu.cn/zlj

目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

引言

- 许多实际问题都要用函数$y = f(x)$来表示某种内在规律的数量关系
  - 部分函数是通过实验或观测得到，只能给出函数在一系列点x_i的函数值$y_i = f(x_i)\ (i = 0,1, \dots, n)$
  - 有些函数虽有解析式，但由于计算复杂，通常也造一张函数表，如三角函数表、对数表等
- 为了研究函数变化规律，往往需要求不在表上的函数值
  - 构造一个既能反映函数$f(x)$特性、又便于计算的简单函数$P(x)$，用$P(x)$近似$f(x)$
  - $P(x_i) = f(x_i)$，对于$i = 0,1, \dots, n$成立

现代机械工业

- 给出零件外形曲线的某些型值点 (x_i, y_i) $(i = 0,1,\ldots,n)$

- 加工时计算零件外形曲线其他点的函数值，即求插值函数的问题

插值法定义

- **定义2.1** 设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且已知在点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的值$y_0,y_1,\ldots,y_n$，若存在一简单函数$P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i \ (i=0,1,\ldots,n), \tag{2.1.1}$$

成立，就称$P(x)$为$f(x)$的插值函数，点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称为插值节点，包含插值节点的区间$[a,b]$称为插值区间，求$P(x)$的方法称为插值法。

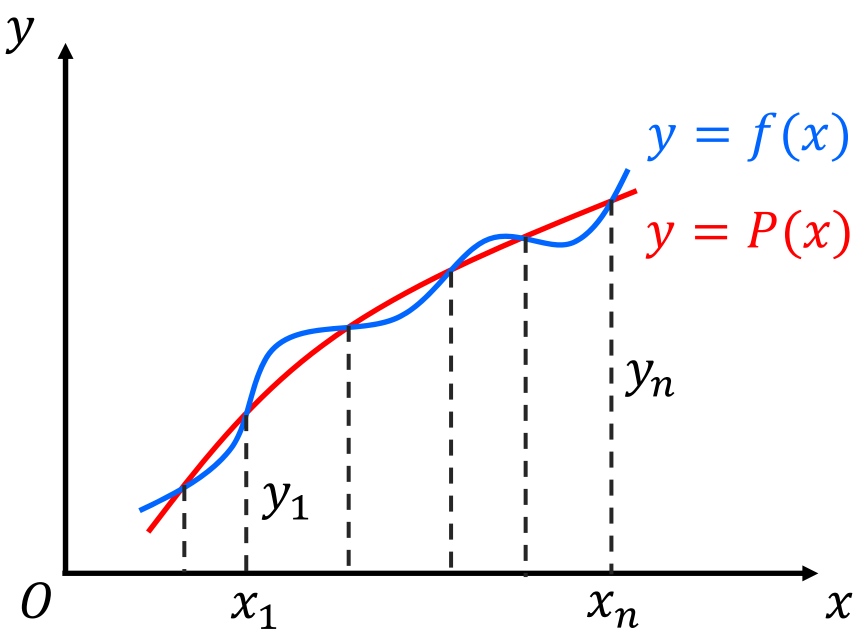
若$P(x)$是次数不超过n的代数多项式，即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \tag{2.1.2}$$

其中a_i为实数，就称$P(x)$为插值多项式，相应的插值法称为多项式插值；若为$P(x)$分段的多项式，就称之为分段插值；若为$P(x)$三角多项式，就称之为三角插值。

插值法的图形表示

- 插值法就是求曲线$y = P(x)$，使其通过给定的$n+1$个点(x_i, y_i)，$i = 0,1,\dots,n$，并用它近似已知曲线$y = f(x)$



发展历史

- 早在一千多年前，我国科学家在研究历法中就应用了线性插值与二次插值
- 基本理论和结果却是在微积分产生以后才逐步完善的，其应用也日益增多
- 计算机广泛使用以后，由于航空、造船、精密机械加工等实际问题的需要，插值法得到进一步发展

本章内容

- 如何求出插值函数
  - 多项式插值
  - 分段插值函数
  - 样条插值函数

- 理论分析
  - 插值函数$P(x)$的存在唯一性
  - 收敛性
  - 误差估计

目录

插值多项式的存在唯一性

- 设$P(x)$是形如式(2.1.2)的插值多项式，H_n代表所有次数不超过n的多项式集合，$P(x) \in H_n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad (2.1.2)$$

- 由$P(x_i) = y_i \ (i = 0,1,\dots,n)$，得到

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}, \qquad (2.2.1)$$

  - 关于$a_0, a_1, \dots, a_n$的$n+1$元线性方程组

- 插值多项式的唯一性⟺方程组解的唯一性

插值多项式唯一

- 方程组(2.2.1)的系数行列式为

$$V_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix} \qquad (2.2.2)$$

  - 称为Vandermonde（范德蒙）行列式

- 利用行列式性质可得

$$V_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)$$

  - $i\neq j$时$x_i\neq x_j$，上式所有因子$x_i-x_j\neq 0$

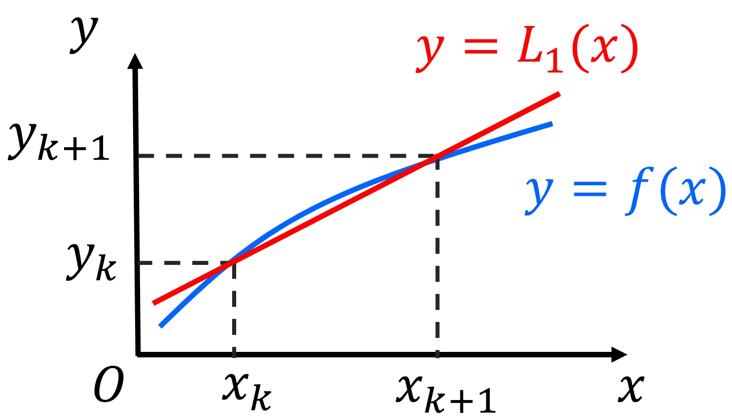
- **定理2.1** 满足式(2.1.1)的插值多项式唯一

线性插值

- $P(x)$可以通过求解方程组(2.2.1)得到
  - 不仅计算复杂，而且难以得到的简单表达式
- 两点之间插值（$n=1$）
  - 已知区间$[x_k, x_{k+1}]$的端点处的函数值$y_k=f(x_k)$，$y_{k+1}=f(x_{k+1})$，要求线性插值多项式$L_1(x)$

$$L_1(x_k)=y_k，\ L_1(x_{k+1})=y_{k+1}$$

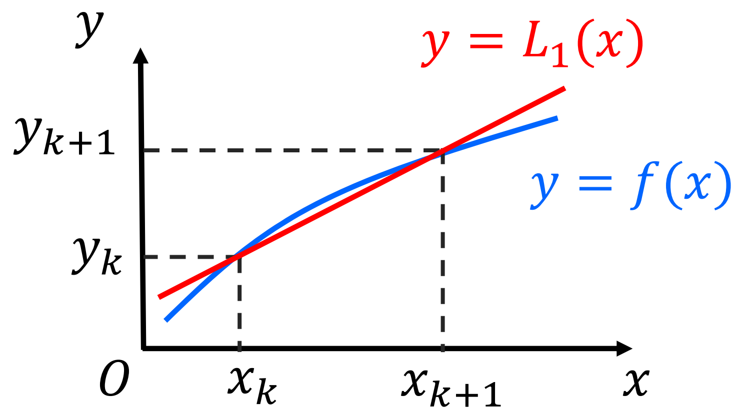
$y=L_1(x)$就是通过(x_k, y_k)和(x_{k+1}, y_{k+1})的直线



线性插值解析式

□ 点斜式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \tag{2.2.3}$$



□ 两点式

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \tag{2.2.4}$$

- $L_1(x)$是由两个线性函数的线性组合得到的

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) \tag{2.2.5}$$

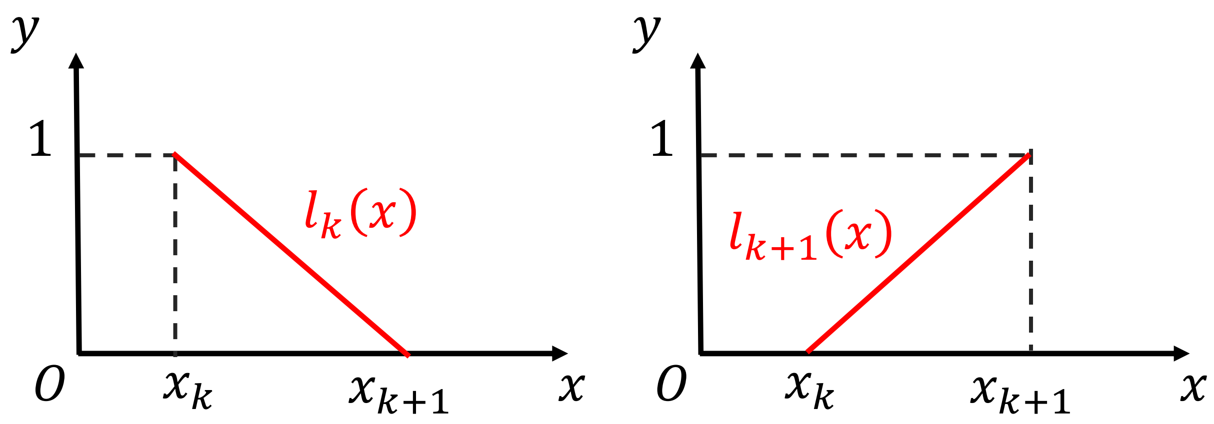
一次插值基函数

- $l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$也是线性插值多项式，并且满足

$$l_k(x_k) = 1，\ l_k(x_{k+1}) = 0$$

$$l_{k+1}(x_k) = 0，\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1$$

被称为一次插值基函数或线性插值基函数



(a) (b)

抛物插值

□ 三个点之间插值（$n = 2$）

- 插值节点x_{k-1}, x_k, x_{k+1}，求二次插值多项式$L_2(x)$

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

- $y = L_2(x)$是通过三点(x_{k-1}, y_{k-1})，(x_k, y_k)，(x_{k+1}, y_{k+1})的抛物线

- 为了求出$L_2(x)$的表达式，可采用基函数方法

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1}) = 1,\ l_{k-1}(x_j) = 0 & (j = k, k+1) \\ l_k(x_k) = 1,\ l_k(x_j) = 0 & (j = k-1, k+1) \\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1,\ l_{k+1}(x_j) = 0 & (j = k-1, k) \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

✓ 基函数$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$是二次函数

二次插值基函数

- $l_{k-1}(x)$有两个零点x_k ,x_{k+1}，可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

  - A为待定系数，可由条件$l_{k-1}(x_{k-1}) = 1$求出

$$A = \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

  - 因此

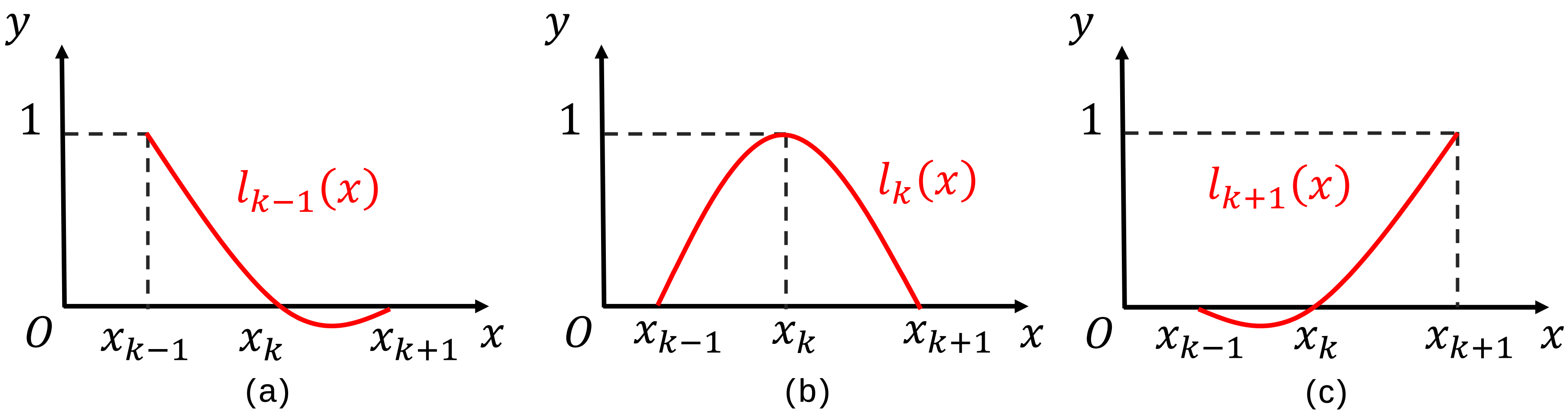
$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

- 同理可得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} \quad l_{k+1}(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}$$

二次插值基函数（续）

- 函数$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$称为二次插值基函数或抛物插值基函数



抛物插值表达式

- 利用二次插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad (2.2.7)$$

  - 显然满足

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

- 具体形式

$$L_2(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+ y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

Lagrange插值多项式

- 讨论通过$n+1$个节点$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$的n次插值多项式$L_n(x)$，假定其满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\ldots,n) \tag{2.2.8}$$

- **定义2.2** 若n次多项式$l_j(x)$ $(j = 0,1,\ldots,n)$在$n+1$个节点$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$上满足

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (j,k = 0,1,\ldots,n) \tag{2.2.9}$$

就称这$n+1$个n次多项式$l_j(x)$ $(j = 0,1,\ldots,n)$为节点x_0，x_1，…，x_n上的n次插值基函数

Lagrange插值多项式（续）

- 仿照之前的推导，n次插值基函数

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}(k=0,1,\ldots,n)$$

- Lagrange插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

  - 由$l_k(x)$的定义可知

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots,n)$$

Lagrange插值多项式（续）

- 若引入记号

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (2.2.12)$$

  - 容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$

  - 式(2.2.11)可改写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \qquad (2.2.13)$$

- n次插值多项式$L_n(x)$通常是次数为n的多项式，特殊情况次数可能小于n
  - 三点共线，则$y = L_2(x)$就是一条直线

插值余项 $L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\dots,n) \quad (2.2.8)$

- 用$L_n(x)$近似$f(x)$，截断误差也称插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

- **定理2.2** 设$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，$L_n(x)$是满足条件式(2.2.8)的插值多项式，则对于任何$x \in [a,b]$，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

  - 这里$\xi \in (a,b)$且依赖于x

定理2.2（证明）

- $R_n(x)$在节点x_k $(k=0,1,\dots,n)$上为零，即

$$R_n(x)=0\quad(k=0,1,\dots,n)$$

- 因此可以写成如下形式

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

  - $K(x)$是与x有关的待定函数

- 把x看成$[a,b]$上的一个固定点，定义函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

  - $\varphi(t)$在点x_0，x_1，…，x_n及x处均为零
  - $\varphi(t)$在$[a,b]$上有$n+2$个零点

定理2.2（证明）

- **Rolle定理** 如果函数$f(x)$满足如下条件：
  1. $f(x)$在闭区间$[a\,,b]$上连续；
  2. $f(x)$在开区间(a,b) 内可导；
  3. $f(x)$在区间端点的函数值相等，即$f(a) = f(b)$，

  那么在(a,b) 内至少有一点$\xi(a < \xi < b)$，使得函数$f(x)$ 在该点的导数等于零，即$f'(\xi) = 0$
- 基于该定理，$\varphi'(t)$在$\varphi(t)$的两个零点间至少有一个零点，故$\varphi'(t)$在$[a,b]$上至少有$n+1$个零点
- 对$\varphi''(t)$再应用Rolle定理，可知$\varphi''(t)$在$[a,b]$上至少有n个零点

定理2.2（证明）

- 依此类推，$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a,b)上至少有1个零点，记为$\xi \in (a,b)$，使$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,K(x)=0$$

- 得到

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- 因此

$$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

  - $\xi \in (a,b)$且依赖于x

讨论

- 余项表达式只有在$f(x)$的高阶导数存在时才能应用，ξ在(a,b)内的具体位置通常未知
- 如果已知$\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$，那么

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \qquad (2.2.16)$$

  - $n=1$，线性插值余项为

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)，\ \xi \in [x_0,x_1]$$

  - $n=2$，抛物插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)，\ \xi \in [x_0,x_2]$$

例2.1

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \qquad (2.2.3)$$

- 已知$\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$，$\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差
  - 取$x_0 = 0.32$，$x_1 = 0.34$，$x_2 = 0.36$，$y_0 = 0.314567$，$y_1 = 0.333487$，$y_2 = 0.352274$
  - 用线性插值计算，取$x_0 = 0.32$及$x_1 = 0.34$，由式(2.2.3)得

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.3367 - x_0)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02} \times 0.0167 = 0.330365$$

例2.1（续）

- 上式的截断误差可由线性插值余项得到

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|$$

其中

$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)| = \max_{x_0 \le x \le x_1} |\sin x| = \sin x_1 \le 0.3335$$

$$f(x) = \sin x$$

于是

$$|R_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)|$$

$$\le \frac{0.3335}{2} \times 0.0167 \times 0.0033 \le 0.92 \times 10^{-5}$$

例2.1（续）

一般来说，外推比内插效果差

- 还用线性插值，但取$x_1 = 0.34$及$x_2 = 0.36$

$$\sin 0.3367 \approx \tilde{L}_1(0.3367) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0.3367 - x_1)$$

$$= 0.333487 + \frac{0.018787}{0.02} \times (-0.0033) = 0.330387$$

- 截断误差为 $\left|\tilde{R}_1(x)\right| = \frac{M_2}{2}|(x - x_1)(x - x_2)|$，

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f''(x)| \le 0.3523$

因此 $\left|\tilde{R}_1(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - \tilde{L}_1(0.3367)\right|$

$$\le \frac{0.3523}{2} \times 0.0033 \times 0.0233 \le 1.36 \times 10^{-5}$$

例2.1（续）

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad (2.2.7)$$

- 用抛物插值计算sin 0.3367， 由式(2.2.7)得

$$\sin 0.3367 \approx y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= L_2(0.3367)$$

$$= 0.314567 \times \frac{0.7689\times10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89\times10^{-4}}{0.0004} + 0.352274 \times \frac{-0.5511\times10^{-4}}{0.0008}$$

$$= 0.330374$$

✓ 这个结果与六位有效数字的正弦函数表完全一样

例2.1（续）

- 上式的截断误差可由抛物插值余项得到

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 \le 0.828$

于是有 $|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)|$

$$\le \frac{0.828}{6} \times \ 0.0167 \times 0.0033 \times \ 0.0233$$

$$\le 0.178 \times 10^{-7}$$

高次插值通常优于低次插值

目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

Lagrange插值的缺点

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} (k = 0,1,\ldots,n)$$

- 简单直观、容易实现
- 无法增量计算：如增加插值节点，那么原来算出的数据均不能利用，必须重新计算

□ 逐次线性插值

- 增量式计算，重用之前的结果

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \quad (2.2.3)$$

例2.1（续）

- 用抛物插值计算$\sin 0.3367$

$$L_2(0.3367) = 0.314567 \times \frac{0.7689 \times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89 \times 10^{-4}}{0.0004}$$

$$+0.352274 \times \frac{-0.5511 \times 10^{-4}}{0.0008} = 0.330374$$

- 由$L_1(0.3367)$和$\tilde{L}_1(0.3367)$按照类似线性插值的方法计算

$$L_2(0.3367) = L_1(0.3367) + \frac{\tilde{L}_1(0.3367) - L_1(0.3367)}{0.36 - 0.32} \times (0.3367 - 0.32)$$

$$= 0.330365 + \frac{0.000022}{0.04} \times 0.0167 = 0.330374$$

Aitken（艾特肯）逐次线性插值公式

- 令$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(x)$表示函数$f(x)$关于节点$x_{i_1}$，$x_{i_2}$，…，$x_{i_n}$的$n-1$次插值多项式
  - i_1，i_2，…，i_n均为非负整数
- $I_{i_k}(x)$是零次多项式，记$I_{i_k}(x)=f(x_{i_k})$
- 两个k次插值多项式可通过线性插值得到$k+1$次插值多项式

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k)\quad(2.3.1)$$

  - $I_{0,1,\ldots,k}(x)$ 和$I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)$有1个下标不同

Aitken逐次线性插值公式（续）

- (2.3.1)是关于节点$x_0,\dots,x_k,x_l$的插值多项式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x)=I_{0,1,\dots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k) \quad (2.3.1)$$

- 对于$i=0,1,\dots,k-1$，

$$I_{0,1,\dots,k-1,l}(x_i)-I_{0,1,\dots,k}(x_i)=0$$

$$\Rightarrow I_{0,1,\dots,k,l}\,(x_i)=I_{0,1,\dots,k}(x_i)=f(x_i)$$

- 当$x=x_k$时， $x-x_k=0$，因此

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x_k)=I_{0,1,\dots,k}(x_k)=f(x_k)$$

Aitken逐次线性插值公式（续）

- (2.3.1)是关于节点$x_0,\ldots,x_k,x_l$的插值多项式

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k)\quad(2.3.1)$$

  - 当$x=x_l$时，

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x_l)=I_{0,1,\ldots,k}(x_l)+\frac{f(x_l)-I_{0,1,\ldots,k}(x_l)}{x_l-x_k}(x_l-x_k)$$
$$=f(x_l)$$

- 当$k=0$时为线性插值；当$k=1$时

$$I_{0,1,l}(x)=I_{0,1}(x)+\frac{I_{0,l}(x)-I_{0,1}(x)}{x_l-x_1}(x-x_1)$$

计算过程

- 由$k=0$到$k=n-1$逐次求得所需的插值多项式

x_0	$f(x_0)=I_0$				
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$			
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$		
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$	
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{0,4}$	$I_{0,1,4}$	$I_{0,1,2,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效

Neville（内维尔）算法

Aitken逐次线性插值公式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k}(x - x_k) \quad (2.3.1)$$

- 由$I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和$I_{0,1,\dots,k-1,l}(x)$组合得到

等价形式

$$I_{0,1,\dots,k+1}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{1,2,\dots,k+1}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_{k+1} - x_0}(x - x_0) \quad (2.3.2)$$

- 由$I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和$I_{1,\dots,k+1}(x)$组合得到，下标连续
- 与2.3节开始的例子一致

计算过程

- 由$k=0$到$k=n-1$逐次求得所需的插值多项式

x_0	$f(x_0)=I_0$				
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$			
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{1,2}$	$I_{0,1,2}$		
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{2,3}$	$I_{1,2,3}$	$I_{0,1,2,3}$	
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{3,4}$	$I_{2,3,4}$	$I_{1,2,3,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效

例2.2

- 已知$f(x) = \operatorname{sh} x$的值在下表左端，用Aitken插值求$\operatorname{sh} 0.23$的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果
0.00	0.0000	
0.20	0.20134	
0.30	0.30452	
0.50	0.52110	
0.60	0.63665	

例2.2（续）

- $I_{0,1} = I_0 + \frac{I_1 - I_0}{x_1 - x_0}(0.23 - x_0) = 0.231541$
- $I_{0,2} = I_0 + \frac{I_2 - I_0}{x_2 - x_0}(0.23 - x_0) = 0.233465$

  $I_{0,1,2} = I_{0,1} + \frac{I_{0,2} - I_{0,1}}{x_2 - x_1}(0.23 - x_1) = 0.232118$
- $I_{0,3} = I_0 + \frac{I_3 - I_0}{x_3 - x_0}(0.23 - x_0) = 0.239706$

  $I_{0,1,3} = I_{0,1} + \frac{I_{0,3} - I_{0,1}}{x_3 - x_1}(0.23 - x_1) = 0.232358$

  $I_{0,1,2,3} = I_{0,1,2} + \frac{I_{0,1,3} - I_{0,1,2}}{x_3 - x_2}(0.23 - x_2) = 0.232034$

例2.2（续）

- 已知$f(x) = \operatorname{sh} x$的值在下表左端，用Aitken插值求sh 0.23的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果		
0.00	0.0000			
0.20	0.20134	0.231541		
0.30	0.30452	0.233465	0.232118	
0.50	0.52110	0.239706	0.232358	0.232034
0.60	0.63665			

例2.2（续）

- $I_{0,4} = I_0 + \frac{I_4 - I_0}{x_4 - x_0}(0.23 - x_0) = 0.244049$

  $I_{0,1,4} = I_{0,1} + \frac{I_{0,4} - I_{0,1}}{x_4 - x_1}(0.23 - x_1) = 0.232479$

  $I_{0,1,2,4} = I_{0,1,2} + \frac{I_{0,1,4} - I_{0,1,2}}{x_4 - x_2}(0.23 - x_2) =$
0.232024

  $I_{0,1,2,3,4} = I_{0,1,2,3} + \frac{I_{0,1,2,4} - I_{0,1,2,3}}{x_4 - x_3}(0.23 - x_3) =$
0.232024

例2.2（续）

- 已知$f(x) = \operatorname{sh} x$的值在下表左端，用Aitken插值求sh 0.23的近似值

x_i	$f(x_i)$	插值结果			
0.00	0.0000				
0.20	0.20134	0.231541			
0.30	0.30452	0.233465	0.232118		
0.50	0.52110	0.239706	0.232358	0.232034	
0.60	0.63665	0.244049	0.232479	0.233024	0.233024

- 3次插值的两个结果相同，故可不用计算4次插值

目录

基于两点式方程的插值多项式

□ 直线两点式方程

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \tag{2.2.4}$$

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \tag{2.2.11}$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} (k = 0,1,\dots,n)$$

- 是对直线两点式方程的推广

基于点斜式方程的插值多项式

- 直线点斜式方程

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- 推广到$n+1$个节点$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

  - a_0， a_1， …， a_n为待定系数
  - 由插值条件$P_n(x_j) = f_j\ (j = 0,1,\dots,n)$确定

基于点斜式方程的插值多项式（续）

- 当$x = x_0$时， $P_n(x_0) = a_0 = f_0$
- 当$x = x_1$时， $P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$，推得

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- 当$x = x_2$时， $P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$，推得

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

- 依此类推，可以得到a_0，a_1， …， a_n

差商

- **定义2.3** 称

$$f[x_0,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$$

为函数$f(x)$关于点x_0，x_k的一阶差商，称

$$f[x_0,x_1,x_k]=\frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$$

为函数$f(x)$关于点x_0，x_1，x_k的二阶差商。

一般地，称

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

为函数$f(x)$的k阶差商

对比Aitken算法

- 函数$f(x)$的k阶差商

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

- Aitken逐次线性插值公式

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k) \quad (2.3.1)$$

$$I_{0,1,\ldots,k}(x)=I_{0,1,\ldots,k-1}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-2,k}(x)-I_{0,1,\ldots,k-1}(x)}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1})$$

- 都基于点斜式方程，有相似性

差商的性质

① k阶差商可表示为函数值$f(x_0)$，$f(x_1)$，…，$f(x_k)$的线性组合

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)} \qquad (2.4.3)$$

- 可用数学归纳法证明
- 表明差商与节点排列顺序无关，称为差商的对称性

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_1, x_0, x_2, \cdots, x_k] = \cdots$$

$$= f[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_0]$$

差商的性质（续）

② 由性质①及(2.4.2)

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}} \quad (2.4.2)$$

- 上式与Aitken算法类似

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \quad (2.4.4)$$

- 上式与Neville算法类似

$$I_{0,1,\ldots,k+1}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{1,2,\ldots,k+1}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_{k+1}-x_0}(x-x_0) \quad (2.3.2)$$

差商的性质（续）

③ 若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数，且节点$x_0, x_1, \cdots, x_k \in [a,b]$，则$n$阶差商与导数关系为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a,b] \qquad (2.4.5)$$

- 可直接用Rolle定理证明

- 利用**定理2.2**、公式(2.4.7)
  - ✓ 用$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$预测$x_n$的误差

差商计算

- 差商计算可列差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Newton插值公式

- 一阶差商

$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

  - 把x看成$[a,b]$上一点，可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

- 二阶差商

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

  - 可得

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

- 以此类推

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_n)$$

Newton插值公式（续）

- 将后一式代入前一式，可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) + f[x, x_0 \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$

$$= N_n(x) + R_n(x)$$

- 其中

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (2.4.6)$$

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \qquad (2.4.7)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (2.2.12)$$

Newton插值公式（续）

- 式(2.4.6)确定的多项式$N_n(x)$显然满足插值条件，且次数不超过n
  - 根据$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，知

$$R_n(x_i)=f[x,x_0\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x_i)=0,\qquad i=0,1,\dots,n$$

  - 根据$N_n(x)=f(x)-R_n(x)$，知

$$N_n(x_i)=f(x_i),\qquad i=0,1,\dots,n$$

- $N_n(x)$就是形如(2.4.1)的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots \\ +a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (2.4.1)$$

$$a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k],\qquad k=0,1\dots,n$$

Newton插值公式（续）

- $N_n(x)$被称为Newton差商插值多项式
  - 系数a_k就是差商表中加横线的各阶差商
  - 比Lagrange插值节省计算量，便于程序设计
- 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \qquad (2.4.7)$$

- 插值多项式唯一，因此(2.4.7)等价(2.2.14)

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

Newton插值公式（续）

- 事实上

$$\left.\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] && (2.4.5) \\ & R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) && (2.4.7) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

- 式(2.4.7)更具有一般性
  - f由离散点给出或f不存在时的情形均适用

例2.3

- 给出$f(x)$的函数表，求4次Newton插值多项式，并由此计算$f(0.596)$的近似值

x_k	$f(x_k)$
0.40	0.41075
0.55	0.57815
0.65	0.69675
0.80	0.88811
0.90	1.02652
1.05	1.25382

例2.3（续）

- 首先根据给定函数表计算差商表
- 一阶差商

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0.57815-0.41075}{0.55-0.40}=1.11600$$

$$f[x_1,x_2]=1.18600,\qquad f[x_2,x_3]=1.27573$$

$$f[x_3,x_4]=1.38410,\qquad f[x_4,x_5]=1.51533$$

- 二阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=0.28000$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=0.35893,\qquad f[x_2,x_3,x_4]=0.43348$$

$$f[x_3,x_4,x_5]=0.52493$$

例2.3（续）

- 首先根据给定函数表计算差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
0.40	<u>0.41075</u>		
0.55	0.57815	<u>1.11600</u>	
0.65	0.69675	1.18600	<u>0.28000</u>
0.80	0.88811	1.27573	0.35893
0.90	1.02652	1.38410	0.43348
1.05	1.25382	1.51533	0.52493

例2.3（续）

- 三阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=0.19733$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=0.21300,\qquad f[x_2,x_3,x_4,x_5]=0.22863$$

- 四阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}=0.03134$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=0.03126$$

- 五阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_0}$$

$$=-0.00012$$

例2.3（续）

- 最终差商表为

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商
0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	-0.00012

例2.3（续）

- 四阶差商接近常数，故取4次插值多项式$N_4(x)$作为近似即可，根据式(2.4.6)

$$N_4(x) = 0.41075 + 1.116(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$

- 因此 $$f(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63195$$

- 根据式(2.4.7)，截断误差

$$|R_4(x)| = f[x, x_0 \cdots, x_4]\omega_5(x), \qquad x = 0.596$$
$$\approx |f[x_0, x_1, \cdots, x_5]\omega_5(0.596)| \le 3.63 \times 10^{-9}$$