第3章 函数逼近与计算

张利军
zlj@nju.edu.cn
http://cs.nju.edu.cn/zlj

目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法

问题背景

- 在数值计算中经常遇到求函数值的问题，我们希望求出便于计算且计算量省的公式来近似已知函数$f(x)$
  - 例如，Taylor展开式的部分和

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

就是一种近似公式，在x_0附近的误差较小

  - 例如，$f(x)=e^x$在$[-1,1]$上用

$$P_4(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

来近似

问题背景（续）

- 误差

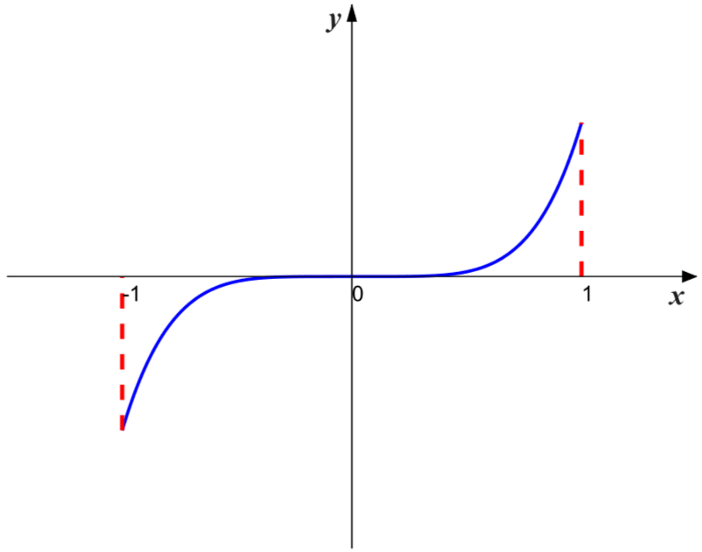
$$R_4(x) = e^x - P_4(x) = \frac{1}{120}x^5 e^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in (-1,1)$$

- 误差限

$$|R_4(x)| \le \frac{e}{120}\left|x^5\right| \qquad \max_{-1\le x\le 1}|R_4(x)| \le \frac{e}{120} \approx 0.0226$$

- 误差分布如下图所示，它在整个区间上误差较大

如精度要求较高，则需取很多项，这样既费时又多占存储单元



函数逼近与计算

- 函数逼近与计算要解决的问题
  - 求在给定精度下求计算次数最少的近似公式
- **定义：** 对于函数类A中给定的函数$f(x)$，要求在另一类较简单且便于计算的函数类B中，求函数$P(x) \in B \subseteq A$，使$P(x)$与$f(x)$之差在某种度量意义下最小
  - 函数类A通常是区间$[a, b]$上的连续函数，记作$C[a, b]$
  - 函数类B通常为代数多项式、分式有理函数或三角多项式等

度量标准

- 一致逼近或均匀逼近

$$\|f(x)-P(x)\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$$

  - $\|\cdot\|_\infty$是范数

- 均方逼近或平方逼近

$$\|f(x)-P(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

  - $\|\cdot\|_2$是范数

- 本章主要研究在这两种度量标准下用代数多项式$P_n(x)$逼近$f(x)\in C[a,b]$
  - 最佳一致逼近多项式、最佳平方逼近多项式

一致逼近的存在性

- 对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，是否存在多项式$P_n(x)$一致收敛于$f(x)$?
  - 用插值法或Taylor展开求$f(x) \in C[a,b]$的逼近多项式，在某些点上可能没有误差，但在整个区间$[a,b]$上误差可能很大，例如Runge现象

- **定理3.1**(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$，则对于任何$\varepsilon > 0$，总存在一个代数多项式$P(x)$，使

$$\|f(x) - P(x)\|_\infty < \varepsilon$$

在$[a,b]$上一致成立

定理3.1

- Bernstein给出一种构造性证明，他根据函数整体逼近的特性造出Bernstein多项式

$$\begin{cases} B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x) \\ P_k(x) \quad = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

- 证明了 $\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x)$在[0,1]上一致成立
- 若$f(x)$在[0,1]上m阶导数连续，则

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(m)}(f,x) = f^{(m)}(x)$$

定理3.1（续）

- 对于$B_n(f,x)$，可以证明
$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$
这只要从恒等式
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
中令$y = 1 - x$就可得到
- 当$x \in [0,1]$时还有$P_k(x) \geq 0$，于是
$$\sum_{k=0}^{n} |P_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) = 1$$
是有界的

定理3.1（续）

- 因而只要$|f(x)| \le \delta$对于任意$x \in [0,1]$成立，则

$$|B_n(f,x)| \le \max_{0\le x\le 1}|f(x)|\sum_{k=0}^{n}|P_k(x)| \le \delta$$

有界，故$B_n(f,x)$是稳定的，有良好的逼近性质

- 但是，$B_n(f,x)$收敛太慢，比三次样条逼近效果差得多，实际中很少使用

□ Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$$

- $\sum_{k=0}^{n}|l_k(x)|$无界，不能保证高阶插值的稳定与收敛

连续函数空间$C[a,b]$

- 区间$[a,b]$上的所有实连续函数组成一个空间，记作$C[a,b]$
- $f\in C[a,b]$的范数定义为

$$\|f\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

  - $\|\cdot\|_\infty$称为∞-范数
- 范数$\|\cdot\|$要满足三个性质：
  1. $\|f\|\ge 0$，当且仅当$f\equiv 0$时才有$\|f\|=0$；
  2. 对于任意$f\in C[a,b]$和$a\in\mathbb{R}$，$\|af\|=|a|\|f\|$；
  3. 三角不等式：对于任意$f,g\in C[a,b]$，有

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\| \tag{3.1.7}$$

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\| \quad (3.1.7)$$

连续函数空间$C[a,b]$（续）

- 空间$C[a,b]$可与向量空间类比，函数$f \in C[a,b]$可看成向量
- 当$f,g \in C[a,b]$时，定义f与g的距离为

$$D(f,g) = \|f-g\|_\infty \qquad (3.1.8)$$

- 同时，由式(3.1.7)可得

$$D(f,g) \le D(f,h) + D(h,g) \qquad (3.1.9)$$

$$\big|\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\big| \le \|f-g\|_\infty \qquad (3.1.10)$$

目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法

研究动机

- 定理3.1中的存在性并没有约束n的值
  - n太大的话，函数复杂，难以计算
- 新的视角：固定n，寻求最优的逼近
- 符号
  - 记次数不大于n的多项式集合为H_n，$H_n \subseteq C[a,b]$
  - 记$H_n = \mathrm{span}\{1, x, \dots, x^n\}$，其中$1, x, \dots, x^n$是$[a,b]$上一组线性无关的函数组，是$H_n$中的一组基
  - H_n中的元素$P_n(x)$可表示为

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

其中$a_0, a_1, \dots, a_n$为任意实数

最佳逼近多项式

- 最佳一致逼近或Chebyshev逼近问题
  - 在H_n中求$P_n^*(x)$逼近$f(x)\in C[a,b]$，使其误差为

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n^*(x)|=\min_{P_n\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|$$

- 定义3.1 $P_n(x)\in H_n$，$f(x)\in C[a,b]$，称

$$\Delta(f,P_n)=\|f-P_n\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)| \quad (3.2.1)$$

为$f(x)$与$P_n(x)$在$[a,b]$上的偏差
  - $\Delta(f,P_n)\ge 0$，$\Delta(f,P_n)$的全体组成一个集合，记作$\{\Delta(f,P_n)\}$，它有下界0

最佳逼近多项式（续）

- 定义 $f(x)$在$[a,b]$ 上的最小偏差
  - 集合$\{\Delta(f,P_n)\}$的下确界

$$E_n=\inf_{P_n\in H_n}\{\Delta(f,P_n)\}=\inf_{P_n\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)| \quad (3.2.2)$$

- **定义3.2** 假定$f(x)\in C[a,b]$，若存在

$$P_n^*(x)\in H_n,\qquad \Delta(f,P_n^*)=E_n \quad (3.2.3)$$

则称$P_n^*(x)$是$f(x)$在$[a,b]$ 上的最佳一致逼近多项式、最小偏差逼近多项式、最佳逼近多项式

- **定理3.2** 若$f(x)\in C[a,b]$，则总存在$P_n^*(x)\in H_n$，使$\|f(x)-P_n^*(x)\|_\infty=E_n$

偏差点

- 定义3.3 设$f(x) \in C[a,b]$，$P(x) \in H_n$，若在$x = x_0$上有

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| = \mu$$

则称x_0是$P(x)$的偏差点

  - 若$P(x_0) - f(x_0) = \mu$，则称x_0为“正”偏差点
  - 若$P(x_0) - f(x_0) = -\mu$，则称x_0为“负”偏差点

- 函数$P(x) - f(x)$在$[a,b]$上连续，因此，至少存在一个点$x_0 \in [a,b]$，使得

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \mu$$

最佳逼近多项式的偏差点性质

- **定理3.3** 若$P(x) \in H_n$是$f(x) \in C[a,b]$的最佳逼近多项式，则$P(x)$同时存在正、负偏差点
  - 因$P(x)$是$f(x)$的最佳逼近多项式，故$\mu = E_n$
  - 由于$P(x)$在$[a,b]$上总有偏差点存在，故可用反证法来证明
  - 假定只有正偏差点，没有负偏差点，于是，对于所有$x \in [a,b]$都有
$$P(x) - f(x) > -E_n$$
  - 由于$P(x) - f(x)$在$[a,b]$上连续，故有最小值大于$-E_n$，用$-E_n + 2h$表示，其中$h > 0$

定理3.3证明

- 因此，对于所有$x \in [a,b]$都有

$$-E_n + 2h \le P(x) - f(x) \le E_n$$

$$-E_n + h \le [P(x) - h] - f(x) \le E_n - h$$

- 即

$$|[P(x) - h] - f(x)| \le E_n - h$$

它表示多项式$P(x) - h$与$f(x)$的偏差小于E_n，与E_n是最小偏差的假定矛盾

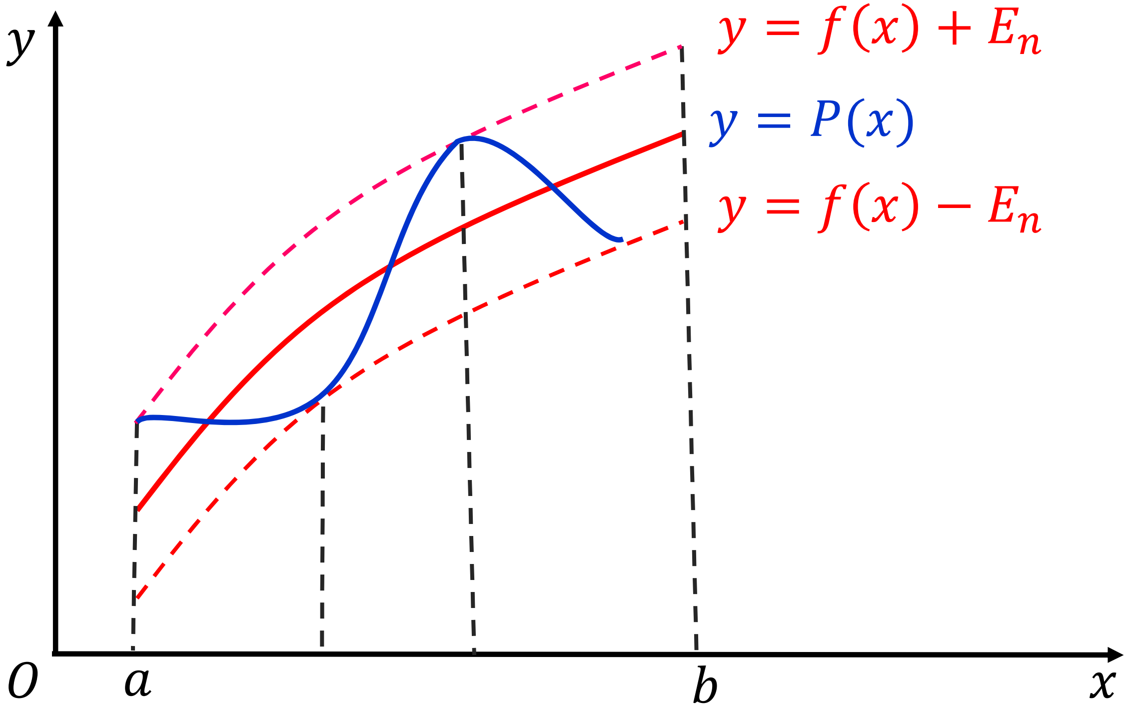
- 同样，可证明只有负偏差点没有正偏差点也是不成立

几何意义

- 曲线$y = P(x)$位于下面两条曲线间的带状区域

$$y = f(x) + E_n, \qquad y = f(x) - E_n$$

- $P(x)$的图形应当与这两条曲线至少各接触一次
- 否则，可把曲线$y = P(x)$稍微移动，得到更好的近似



Chebyshev定理

- 定理**3.4** $P(x) \in H_n$ 是$f(x) \in C[a,b]$的最佳逼近多项式的充要条件是$P(x)$在$[a,b]$上至少有$n+2$个轮流为“正”、“负”的偏差点，即有$n+2$个点$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \le b$，使

$$P(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \|P(x) - f(x)\|_\infty \qquad (3.2.4)$$
$$\sigma = \pm 1, \qquad k = 1,2,\ldots,n+2$$

这样的点组称为Chebyshev交错点组

- 只证充分性．假定在$[a,b]$上有$n+2$个点使式(3.2.4)成立，要证明$P(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的最佳逼近多项式，用反证法求证

定理3.4证明

- 若存在$Q(x) \in H_n$，$Q(x) \not\equiv P(x)$使

$$\|f(x) - Q(x)\|_\infty < \|f(x) - P(x)\|_\infty$$

- 注意到

$$P(x) - Q(x) = [P(x) - f(x)] - [Q(x) - f(x)]$$

在点$x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$上的符号与$P(x_k) - f(x_k) = (k = 1, \dots, n + 2)$一致

  - ✓ $P(x_k) - f(x_k) = \|f(x) - P(x)\|_\infty$
  - ✓ $Q(x_k) - f(x_k)$的值小，不足以影响符号

- 因此，故$P(x) - Q(x)$也在$n + 2$个点上轮流取符号“$+$”、“$-$”

定理3.4证明（续）

- 由连续函数性质，$P(x)-Q(x)$在(a,b)内有$n+1$个零点
- 但$P(x)-Q(x)\neq 0$是不超过n次的多项式，它的零点不超过n，这个矛盾说明假设不对，故$P(x)$就是所求最佳逼近多项式，充分性得证
- 必要性证明较繁，但证明思想类似定理3.3，此处从略

Chebyshev定理的推论

- **推论1** 若$f(x) \in C[a,b]$，则在H_n中存在唯一的最佳逼近多项式
  - 若H_n中有两个最佳逼近多项式$P(x)$与$Q(x)$，则对于所有$x \in [a,b]$，都有

$$-E_n \leq P(x) - f(x) \leq E_n \quad -E_n \leq Q(x) - f(x) \leq E_n$$

  - 于是

$$-E_n \leq \frac{P(x)+Q(x)}{2} - f(x) \leq E_n$$

表明$R(x) = \frac{P(x)+Q(x)}{2}$也是$H_n$中的最佳逼近多项式

  - 因此，$R(x) - f(x)$的$n+2$个交错点组$\{x_k\}$满足

$$R(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma E_n (k = 1, \dots, n+2)$$

推论1证明

- 同时

$$E_n = |R(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} + \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2}\right| \quad (3.2.5)$$

- 由于$|P(x_k) - f(x_k)| \le E_n$，$|Q(x_k) - f(x_k)| \le E_n$，故当且仅当

$$\frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} = \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2} = \pm\frac{E_n}{2}$$

时，式(3.2.5)才能成立

- 于是$P(x_k) = Q(x_k)(k = 1, \dots, n + 2)$从而表明$P(x) - Q(x)$有$n + 2$个根，这个矛盾说明$Q(x) \equiv P(x)$

Chebyshev定理的推论

- **推论2** 若$f(x) \in C[a,b]$，则其最佳逼近多项式$P_n^*(x) \in H_n$就是$f(x)$的一个Lagrange插值多项式
  - 由定理3.4可知，$P_n^*(x) - f(x)$在$[a,b]$上要么恒为零，要么有$n+2$个轮流取“正”、“负”的偏差点
  - 于是存在$n+1$个点$x_k \leq \overline{x_k} \leq x_{k+1}(k = 1,2,\ldots,n+1)$使$P_n^*(\overline{x_k}) - f(\overline{x_k}) = 0$，以$\overline{x_k}$为插值节点的Lagrange插值多项式就是$P_n^*(x)$
    - ✓ 插值多项式的唯一性

最佳一次逼近多项式

- 定理3.4给出了最佳逼近多项式$P(x)$的特性，但要求出$P(x)$却相当困难
- 简单起见，考虑$n = 1$的情形
  - 假定$f(x) \in C^2[a,b]$，且$f''(x)$在(a,b)内不变号，要求最佳一次逼近多项式$P_1(x) = a_0 + a_1 x$
  - 根据定理3.4可知，至少有3个点$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$，使

$$P_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |P_1(x) - f(x)| \quad (\sigma = \pm 1, k = 1,2,3)$$

  - 根据函数连续性，$P_1(x) - f(x)$在(a,b)内至少有2个零点

最佳一次逼近多项式（续）

- 根据Rolle定理， $P_1'(x) - f'(x) = a_1 - f'(x)$在$(a, b)$内至少有1个零点
- 由于$f''(x)$在(a, b)上不变号，故$f'(x)$单调，$a_1 - f'(x)$在(a, b)内只有1个零点
- 因此， $P_1'(x) - f'(x)$的变化趋势为“$+0-$”或者“$-0+$”

  ✓ $P_1(x) - f(x)$有3个轮流为正、负的偏差点

  （1） $+0-$：误差$P_1(x) - f(x)$ 由 负（极小）→ 零 → 正（极大）→ 零 → 负（极小）

  （2）$-0+$：误差$P_1(x) - f(x)$ 由 正（极大）→ 零 →负（极小）→ 零 → 正（极大）

最佳一次逼近多项式（续）

- 根据Rolle定理， $P_1'(x) - f'(x) = a_1 - f'(x)$在$(a,b)$内至少有1个零点
- 由于$f''(x)$在(a,b)上不变号，故$f'(x)$单调，$a_1 - f'(x)$在(a,b)内只有1个零点
- 因此， $P_1'(x) - f'(x)$的变化趋势为“$+0-$”或者“$-0+$”，必然导致

（1）x_2处梯度为0

$$P_1'(x_2) - f'(x_2) = a_1 - f'(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_2) = a_1$$

（2） x_1和x_3位于区间端点

$$x_1 = a, x_3 = b$$

$$\Rightarrow P_1(a) - f(a) = P_1(b) - f(b) = -[P_1(x_2) - f(x_2)]$$

$f'(x_2) = a_1$

最佳一次逼近多项式（续）

- 由此得到

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \\ a_0 + a_1 a - f(a) = f(x_2) - (a_0 + a_1 x_2) \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

- 解出

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (3.2.7)$$

- 代入(3.2.6)，得到

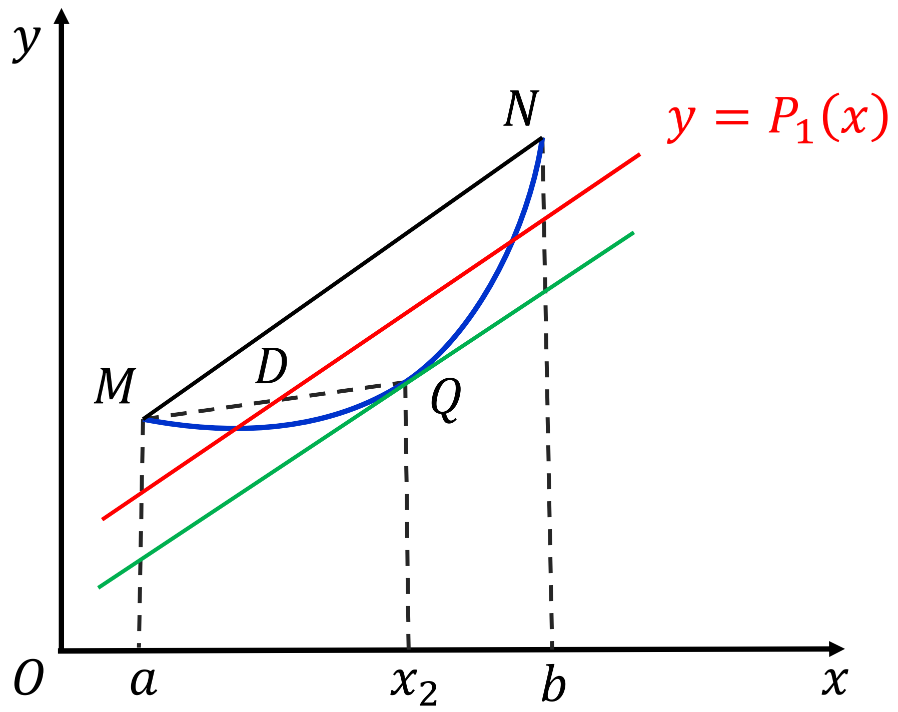
$$a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{a + x_2}{2} \qquad (3.2.8)$$

- 这就得到最佳一次逼近多项式$P_1(x)$，其方程为

$$P_1(x) = \frac{1}{2}[f(a) + f(x_2)] + a_1\left(x - \frac{a + x_2}{2}\right)$$

几何意义

- 直线$y = P_1(x)$与弦MN平行，且通过MQ的中点D



例3.1

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (3.2.7)$$

- 求$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$在[0,1]上的最佳一次逼近多项式
  - 由式(3.2.7)可算出

$$a_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

  - 此外，由于$f'(x_2) = a_1$，可得

$$\frac{x_2}{\sqrt{1 + x_2^2}} = \sqrt{2} - 1$$

  - 解得

$$x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \approx 0.4554 \qquad f(x_2) = \sqrt{1 + x_2^2} \approx 1.0986$$

$$a_0 = \frac{f(a)+f(x_2)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a+x_2}{2}$$

例3.1（续）

- 由式(3.2.8)得

$$a_0 = \frac{1+\sqrt{1+x_2^2}}{2} - a_1\frac{x_2}{2} \approx 0.955$$

- 得$f(x)=\sqrt{1+x^2}$的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x) = 0.955 + 0.414x$$

- 故

$$\sqrt{1+x^2} \approx 0.955 + 0.414x, \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (3.2.9)$$

- 误差限为

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x^2} - P_1(x)\right| \le f(0) - 0.955 = 0.045$$

- 在式(3.2.9)中若令$x = \frac{a}{b} \le 1$，得到近似求根公式

$$\sqrt{a^2+b^2} \approx 0.955a + 0.414b$$

目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法

最佳平方逼近

- 均方逼近或平方逼近

$$\|f(x)-P(x)\|_2=\sqrt{\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

- $f(x)$在$[a,b]$上的最佳平方逼近多项式
  - 若存在$P_n^*(x)\in H_n$，使

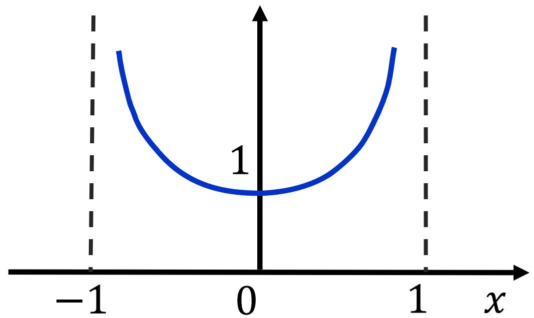
$$\|f-P_n^*\|_2=\sqrt{\int_a^b [f(x)-P_n^*(x)]^2\,\mathrm{d}x}=\inf_{P\in H_n}\|f-P\|_2$$

- 先介绍内积空间的预备知识

权函数

- 定义3.4 设在区间(a,b)内，非负函数$\rho(x)$满足以下条件，就称$\rho(x)$为区间(a,b)内的权函数：
  1. $\int_a^b |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\dots)$存在
  2. 对于非负的连续函数$g(x)$，若
  $$\int_a^b g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.3.2}$$
  则在(a,b)内$g(x)\equiv 0$
- $\rho(x)$对(a,b)内的点赋予权重

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



函数内积

- 定义3.5 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，积分

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.3.3}$$

称为函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上的内积

- 这样定义的内积满足下列四条公理：
  1. $(f,g)=(g,f)$
  2. $(cf,g)=c(f,g)$，c为常数
  3. $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$
  4. $(f,f)\geq 0$，当且仅当$f=0$ 时$(f,f)=0$

欧式空间$\mathbb{R}^n$中的内积和范数

- 设$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\dots,f_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\dots,g_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$， 其内积定义为

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\sum_{k=1}^{n}f_k g_k$$

- $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^n$的模（范数）定义为

$$\|\boldsymbol{f}\|_2=\sqrt{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})}=\left(\sum_{k=1}^{n}f_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 通常没有权函数

函数的范数

- 定义3.6 $f(x) \in C[a,b]$，称

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.3.4}$$

为$f(x)$的Euclid范数（满足范数的三条性质）

- 定理3.5 对于任何$f(x), g(x) \in C[a,b]$，下列结论成立：
  1. $|(f,g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2$（Cauchy-Schwarz不等式）
  2. $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$（三角不等式）
  3. $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)$（平行四边形定律）

正交函数

- **定义3.7** 若$f(x), g(x) \in C[a,b]$满足

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{3.3.7}$$

则称f与g在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交

若函数族$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \tag{3.3.8}$$

则称$\{\varphi_k\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交函数族；

若$A_k \equiv 1$，则称$\{\varphi_k\}$为标准正交函数族

举例

- 例如，三角函数族

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

就是区间$[-\pi,\pi]$上的正交函数族（权$\rho(x)\equiv 1$），其

$$(1,1)=2\pi$$

$$(\sin nx, \sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases} \qquad (n,m=1,2,\dots)$$

$$(\cos nx, \cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases} \qquad (n,m=1,2,\dots)$$

$$(\cos nx, \sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx \, \mathrm{d}x=0 \qquad (n,m=1,2,\dots)$$

线性无关函数

- **定义3.8** 设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x)$在$[a,b]$上连续，如果

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)=0$$

当且仅当$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$时成立，则称$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x)$在$[a,b]$上是线性无关的

- 若函数族$\{\varphi_k\}(k=0,1,\dots)$中的任何有限个$\varphi_k$线性无关，则称$\{\varphi_k\}$为线性无关函数族
  - $1,x,x^2,\dots,x^n,\dots$就是$[a,b]$上的线性无关函数族

线性无关函数（续）

- 若$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x)$是$[a,b]$上的线性无关函数，且$a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$是任意实数，则

$$S(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

的全体是$C[a,b]$中的一个子集，记作

$$\Phi=\operatorname{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}\}$$

- **定理3.6** $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x)$在$[a,b]$上线性无关的充要条件是它的Cramer行列式$G_{n-1}\neq 0$

$$G_{n-1}=G(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_{n-1})\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_{n-1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_{n-1},\varphi_0) & (\varphi_{n-1},\varphi_1) & \cdots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\end{vmatrix}$$

函数的最佳平方逼近

- 对$f(x) \in C[a,b]$，及$C[a,b]$中的一个子集$\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，若存在$S^*(x) \in \Phi$，使

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S\in\Phi} \|f - S\|_2^2 = \inf_{S\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \, \mathrm{d}x \quad (3.3.11)$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在Φ中的最佳平方逼近函数

- 显然，求$S^*(x)$ 等价于求多元函数

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

的最小值

求解最佳平方逼近函数

- 由于$I(a_0, a_1, \dots, a_n)$是关于$a_0, a_1, \dots, a_n$的二次函数，利用多元函数极值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0(k = 0,1, \dots, n)$$

可得

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0\ (k = 0,1, \dots, n)$$

- 于是有

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_k, \varphi_j)a_j = (f, \varphi_k)(k = 0,1, \dots, n) \qquad (3.3.13)$$

是关于$a_0, a_1, \dots, a_n$的线性方程组，称为法方程

求解最佳平方逼近函数（续）

- 由于$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$线性无关，故系数行列式$G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$，于是方程组(3.3.13)有唯一解$a_k = a_k^* (k = 0,1, \dots, n)$，从而得到

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \cdots + a_n^* \varphi_n(x)$$

- 下面证明$S^*(x)$满足式(3.3.11)

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \|f - S\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \int_a^b \rho(x) [f(x) - S(x)]^2 \, \mathrm{d}x \qquad (3.3.11)$$

即对任何$S \in \Phi$

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - S^*(x)]^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \rho(x) [f(x) - S(x)]^2 \, \mathrm{d}x \qquad (3.3.14)$$

求解最佳平方逼近函数（续）

- 为此只要考虑

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x$$

- 由于$S^*(x)$的系数a_k^*满足下面的方程

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)-f(x)\right]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0\ (k=0,1,\dots,n)$$

因此

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\dots,n)$$

求解最佳平方逼近函数（续）

- 为此只要考虑

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x=0$$

$\Uparrow$

$S(x)-S^*(x)$一定可以写成 $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$的线性组合

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\dots,n)$$

求解最佳平方逼近函数（续）

- 因此

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x\geq 0$$

- 于是(3.3.14)成立。这就证明了$S^*(x)$的是$f(x)$在Φ中的最佳平方逼近函数

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (3.3.14)$$

最佳平方逼近函数的平方误差

- 若令$\delta = f(x) - S^*(x)$，则平方误差为

$$\|\delta\|_2^2 = (f - S^*, f - S^*)$$

$$= (f, f - S^*) - (S^*, f - S^*)$$

- 由于

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0(k = 0,1,2,\dots,n)$$

- 可得$(S^*, f - S^*) = 0$，因此

$$\|\delta\|_2^2 = (f, f) - (f, S^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^*(\varphi_k, f) \quad (3.3.15)$$

举例

- 取$\varphi_k(x) = x^k, \rho(x) \equiv 1, f(x) \in C[0,1]$，即要在$H_n$中求$n$次最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$$

  - 回顾法方程

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k)(k = 0,1, \dots, n) \qquad (3.3.13)$$

  - 此时

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{k+j} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+j+1}$$

$$(f, \varphi_k) = \int_0^1 f(x) x^k \, \mathrm{d}x \equiv d_k$$

举例（续）

- 构造下面的方程组，求解即可得到系数a_k^*

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$$

- $\boldsymbol{H}$表示行列式$G_n = G(1, x, x^2, \dots, x^n)$对应的矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

$\boldsymbol{H}$称为Hilbert矩阵

- 此外

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \dots, d_n)^{\mathrm{T}}$$

$$d_k = \left(f, x^k\right)(k = 0,1, \dots, n) \quad (3.3.17)$$

$$d_k = (f, x^k)(k = 0,1, \dots, n) \quad (3.3.17)$$

例3.2

- 求$f(x) = \sqrt{1+x^2}$在[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式
  - 由式(3.3.17)可算出

$$d_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.147$$

$$d_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0.609$$

  - 构造方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

例3.2（续）

- 求解，得到

$$a_0 = 0.934, \qquad a_1 = 0.426, \qquad S_1^* = 0.934 + 0.426x$$

- 平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = (f,f) - (f,S_1^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{1} a_k^*(\varphi_k, f)$$

$$= \int_0^1 (1+x^2)\,\mathrm{d}x - 0.426d_1 - 0.934d_0 = 0.0026$$

- 最大误差

$$\|\delta\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x^2} - S_1^*(x)\right| = 0.066$$

问题

- $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$作基求最佳平方逼近多项式，当$n$较大时，系数矩阵式(3.3.16)是高度病态的，求解法方程舍入误差很大

$$\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

- 解决方案：用正交多项式作基