



# 目录

---

- 引言
- Newton-Cotes公式
- Romberg算法
- Gauss公式
- 数值微分



# Gauss公式

□ 形如下式的机械求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.4.1)$$

■ 含有 $2n + 2$ 个待定参数  $x_k, A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )

□ Gauss公式

■ 适当选择 $x_k, A_k$ ，使求积公式具有 $2n + 1$ 次代数精度

□ 定义4.3 如果求积公式(4.4.1)具有 $2n + 1$ 次代数精度，则称节点 $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )是Gauss点



# Gauss公式的构造

## □ 插值型求积公式

- 求积系数 $A_k$ 通过插值基函数 $l_k(x)$ 积分得出

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx$$

- 定理4.4 对于插值型求积公式(4.4.1), 其节点 $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )是Gauss点的充分必要条件, 是以这些点为零点的多项式 $\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ 与任意次数不超过 $n$ 的多项式 $P(x)$ 均正交, 即

$$\int_a^b P(x)\omega(x) dx = 0 \quad (4.4.2)$$



## 定理4.4证明

### □ 必要性

- 设 $P(x)$ 是任意次数不超过 $n$ 的多项式, 则 $P(x)\omega(x)$ 的次数不超过 $2n + 1$
- 如果 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是Gauss点, 则求积公式对于 $P(x)\omega(x)$ 能准确成立, 即有

$$\int_a^b P(x)\omega(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k P(x_k)\omega(x_k)$$

- 但 $\omega(x_k) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), 故下式成立

$$\int_a^b P(x)\omega(x) dx = 0 \quad (4.4.2)$$



## 定理4.4证明（续）

$$\int_a^b P(x)\omega(x) dx = 0 \quad (4.4.2)$$

### □ 充分性

- 对于任意给定次数不超过 $2n + 1$ 的多项式 $f(x)$ ，用 $\omega(x)$ 除 $f(x)$ ，记商为 $P(x)$ ，余式为 $Q(x)$ ， $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是次数不超过 $n$ 的多项式：

$$f(x) = P(x)\omega(x) + Q(x)$$

- 利用式(4.4.2)，可得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b Q(x) dx \quad (4.4.3)$$

- 由于所给求积公式是插值型的，它对于 $Q(x)$ 能准确成立（定理4.1）



## 定理4.4证明 (续)

$$f(x) = P(x)\omega(x) + Q(x)$$

$$\int_a^b Q(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k Q(x_k)$$

- 注意到 $\omega(x_k) = 0$ , 因此

$$Q(x_k) = P(x_k)\omega(x_k) + Q(x_k) = f(x_k)$$

- 从而有 
$$\int_a^b Q(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- 结合(4.4.3), 得到

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- 知式(4.4.1)对次数不超过 $2n + 1$ 的多项式均成立



# Gauss-Legendre公式

□  $a = -1, b = 1$ , 考察区间 $[-1, 1]$ 的Gauss公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.4.4)$$

□ Legendre多项式

■ 当区间为 $[-1, 1]$ 、权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 时, 由 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 正交化得到的多项式

$$P_0(x) = 1 \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

■  $P_{n+1}(x)$ 与任一次数不超过 $n$ 的多项式正交

■  $P_{n+1}(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有 $n + 1$ 个不同实零点



## Gauss-Legendre公式 (续)

□ Legendre多项式 $P_{n+1}(x)$ 的零点就是求积公式(4.4.4)的Gauss点

■ 被称为Gauss-Legendre公式

□ 取 $P_1(x) = x$ 的零点 $x_0 = 0$ 作节点构造求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(0)$$

■ 令上式对 $f(x) = 1$ 准确成立, 即可定出 $A_0 = 2$

■ 得到中矩形公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$





## Gauss-Legendre公式 (续)

□ 再取  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  的两个零点  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  构造

求积公式 
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

■ 令上式对  $f(x) = 1, x$  准确成立, 有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

■ 解出  $A_0 = A_1 = 1$ , 得到两点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



## Gauss-Legendre公式 (续)

□ 继续推导，得到三点Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

□ 四点、五点Gauss-Legendre公式见表4.5

□ 拓展到任意求积区间 $[a, b]$

■ 通过变换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ 可以化到区间 $[-1, 1]$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$



# Gauss公式的余项

□ 定理4.5 对于Gauss公式 (4.4.1), 其余项

$$R(x) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx$$

这里  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

- 以  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为节点构造次数不大于  $2n + 1$  的多项式  $H(x)$ , 使其满足条件

$$H(x_i) = f(x_i) \quad H'(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

这里的  $H(x)$  称为Hermite插值多项式

- 由于Gauss公式具有  $2n + 1$  次代数精度, 它对于  $H(x)$  能准确成立



## Gauss公式的余项（续）

$$\int_a^b H(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

■ 因此余项

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b H(x) dx = \int_a^b [f(x) - H(x)] dx \end{aligned}$$

■ Hermite插值余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad (2.6.6)$$



## Gauss公式的余项（续）

■ 因此

$$R(x) = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \omega^2(x) dx$$

■ 由于 $\omega^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上保号，再次使用加权积分中值定理可得

$$R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx$$



# Gauss公式的稳定性

- Newton-Cotes公式不稳定
  - 当 $n \geq 8$ 时, Cotes系数有正有负
- Gauss公式不但是高精度的, 而且数值稳定
  - 求积系数具有非负性
- 定理4.6 Gauss公式(4.4.1) 求积系数 $A_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 全是正的

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.4.1)$$



## 定理4.6证明

□ 考察

$$l_k(x) = \prod_{j=0(j \neq k)}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

■ 它是 $n$ 次多项式，因而 $l_k^2(x)$ 是 $2n$ 次多项式

□ Gauss公式对于 $l_k^2(x)$ 能准确成立，即有

$$0 < \int_a^b l_k^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i l_k^2(x_i) = A_k$$



# Gauss公式稳定的原因

## □ 求积公式

$$I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- 实际计算时，通常不一定能提供准确的数据  $f_k = f(x_k)$ ，而只是给出含有误差（例如舍入误差）的数据  $f_k^*$ ，故实际求得的积分值为

$$I_n^* = \sum_{k=0}^n A_k f_k^*$$

- $I_n$  和  $I_n^*$  之间的差异有多大？





## Gauss公式稳定的原因（续）

$$|I_n^* - I_n| = \left| \sum_{k=0}^n A_k (f_k^* - f_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |A_k (f_k^* - f_k)|$$

□ 由于Gauss公式的求积系数具有非负性

$$|I_n^* - I_n| \leq \sum_{k=0}^n A_k |f_k^* - f_k| \leq \left( \sum_{k=0}^n A_k \right) \max_{0 \leq k \leq n} |f_k^* - f_k|$$

□ 根据式(4.1.4)，可得

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a \quad \Rightarrow \quad |I_n^* - I_n| \leq (b - a) \max_{0 \leq k \leq n} |f_k^* - f_k|$$



# 带权的Gauss公式

## □ 考察积分

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

- $\rho(x) \geq 0$ 为权函数，当 $\rho(x) \equiv 1$ 时即为普通积分

## □ 仿照普通积分的处理方式，考察求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- 如果它对于任意次数不超过  $2n + 1$  的多项式均能准确地成立，则称之为Gauss型的
- 上述Gauss公式的求积节点 $x_k$ 仍称为Gauss点



# 带权Gauss公式的构造

- $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$  是Gauss点的充要条件，下式是区间  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  的正交多项式

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

- 若  $a = -1, b = 1$ ，且取权函数  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，则所建立的Gauss公式为

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.4.6)$$

- 称为Gauss-Chebyshev公式



## 带权Gauss公式的构造（续）

- 区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式是Chebyshev多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), |x| \leq 1$$

- 求积公式的Gauss点是 $n + 1$ 次Chebyshev多项式的零点，即

$$x_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{2n + 2}\pi\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

- 运用正交多项式的零点构造Gauss求积公式，只是针对某些特殊的权函数才有效
  - 一般权函数的正交化很复杂



## 带权Gauss公式的构造（续）

### □ 一般方法，借鉴4.1.2节的待定系数法

- 欲使求积公式(4.1.3)具有 $m$ 次代数精度，只要令它对于 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$ 都能成立

$$\begin{cases} \sum A_k = b - a \\ \sum A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \vdots \\ \sum A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

- 是一个确定参数 $x_k$ 和 $A_k$ 的代数问题



## 举例

□ 设要构造下列形式的Gauss公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \quad (4.4.7)$$

■ 令它对于  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  准确成立, 得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = \frac{2}{5} \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{7} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = \frac{2}{9} \end{cases} \quad (4.4.8)$$



## 举例（续）

- 经过一系列解方程步骤，可得

$$x_0 = 0.821162 \quad x_1 = 0.289949$$

$$A_0 = 0.389111 \quad A_1 = 0.277556$$

- 因此

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$$

$$\approx 0.389111f(0.821162) + 0.277556f(0.289949)$$



# 目录

---

- 引言
- Newton-Cotes公式
- Romberg算法
- Gauss公式
- 数值微分





# 中点方法

- 按照数学分析的定义，导数是差商的极限

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- 如果精度要求不高，则可以取差商作为倒数的近似值，即

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{或} \quad f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

- 中点方法（两者取平均）

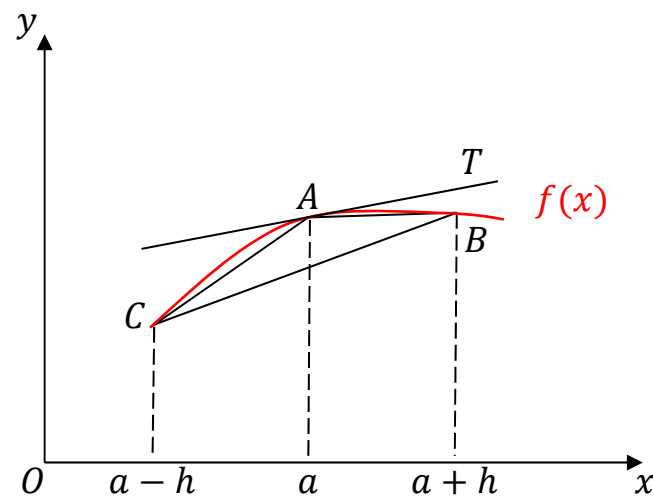
$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$



## 中点方法（续）

□ 三种导数的近似值对应于向前差商、向后差商、中心差商

- 分别分表示弦 $AB$ 、 $AC$ 和 $BC$ 的斜率
- $BC$ 的斜率更接近切线 $AT$ 的斜率
- 中点方法更为可取



□ 机械求导方法

- 将导数的计算归结为计算 $f$ 在若干节点上的函数值



# 误差分析

## □ 要利用中点公式

$$G(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

计算导数 $f'(a)$ 的近似值，需要选择合适的步长，为此需要进行误差分析

## □ 分别将 $f(a \pm h)$ 在 $x = a$ 处作Taylor展开

$$f(a \pm h) = f(a) \pm hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) \pm \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) \pm \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(a) + \dots$$



## 误差分析（续）

### □ 代入中点公式，化简

$$G(h) = f'(a) + \frac{h^2}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(a) + \dots$$

- 从截断误差的角度看，步长越小，计算结果越准确

### □ 再考察舍入误差，当 $h$ 很小时，因 $f(a+h)$ 与 $f(a-h)$ 很接近，直接相减会造成有效数字的严重损失

- 从舍入误差的角度看，步长不宜太小



## 举例

□ 中点公式求  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $x = 2$  处的一阶导数

$$G(h) = \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{2h}$$

■ 取四位数字计算，结果如下表所示

$h$	$G(h)$	$h$	$G(h)$	$h$	$G(h)$
1	0.3660	0.05	0.3530	0.001	0.3500
0.5	0.3564	0.01	0.3500	0.0005	0.3000
<b>0.1</b>	<b>0.3535</b>	0.005	0.3500	0.0001	0.3000

■ 导数的准确值  $f'(2) = 0.353553$

■  $h = 0.1$  的逼近效果最好，如果进一步缩小步长，则逼近效果会越来越差



# 插值型的求导公式

- 对于列表函数  $y = f(x)$ ，运用插值原理，可以建立插值多项式  $y = P_n(x)$  作为它的近似
- 由于多项式的求导比较容易，取  $P_n'(x)$  的值作为  $f'(x)$  的近似值，即

$$f'(x) \approx P_n'(x) \quad (4.5.1)$$

- 统称为插值型的求导公式
- 即使  $f(x)$  与  $P_n(x)$  的相差不多，导数的近似值  $P_n'(x)$  与导数的真值  $f'(x)$  仍然可能差别很大，因而在使用求导公式(4.5.1)时应特别注意误差的分析



# 误差分析

## □ 差值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (2.2.14)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (2.2.12)$$

## □ 求导公式(4.5.1)的余项

$$f'(x) - P'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi)$$

- $\xi$  是  $x$  的未知函数，无法对第二项进一步化简
- 对于随意给出的点  $x$ ，误差  $f'(x) - P'_n(x)$  是无法预估的



## 误差分析（续）

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (2.2.12)$$

- 如果限定求某个节点  $x_k$  的导数值，那么上面第二项因  $\omega_{n+1}(x_k) = 0$  而变为零，这时余项公式为

$$f'(x_k) - P'_n(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_k) \quad (4.5.2)$$

- 下面仅仅考察节点处的导数值
- 为简化讨论，假定所给的节点是等距的





## 两点公式

- 已给出两个节点 $x_0, x_1$ 上的函数值 $f(x_0), f(x_1)$ ，作线性插值公式

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

- 上式两端求导，记 $x_1 - x_0 = h$ ，有

$$P_1'(x) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)]$$

- 于是有下列求导公式

$$P_1'(x_0) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)] \quad P_1'(x_1) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)]$$



## 两点公式（续）

### □ 利用余项公式

$$f'(x_k) - P'_n(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_k) \quad (4.5.2)$$

### □ 带余项的两点公式

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} f''(\xi)$$



## 三点公式

- 设已给出三个节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ 上的函数值，作二次插值

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

- 令 $x = x_0 + th$ ，上式可表示为

$$P_2(x_0 + th) = \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)f(x_0) - t(t - 2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t - 1)f(x_2)$$



## 三点公式（续）

□ 两端对 $t$ 求导，可以推导出

$$\begin{aligned} & P_2'(x_0 + th) \\ &= \frac{1}{2h} [(2t - 3)f(x_0) - (4t - 4)f(x_1) + (2t - 1)f(x_2)] \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

■ 这里撇号表示对变量 $x$ 求导数

□ 分别取 $t = 0, 1, 2$ ，得到以下三种三点公式

$$P_2'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$P_2'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$P_2'(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$



## 三点公式（续）

### □ 利用余项公式

$$f'(x_k) - P'_n(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_k) \quad (4.5.2)$$

### □ 带余项的三点求导公式

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \\ f'(x_2) &= \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

- 式(4.5.4)是中点公式，它少用了一个函数值



# 高阶数值微分公式

□ 用插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

□ 将式(4.5.3)再对 $t$ 求导一次，可以推导出

$$\begin{aligned} & P_2'(x_0 + th) \\ &= \frac{1}{2h} [(2t - 3)f(x_0) - (4t - 4)f(x_1) + (2t - 1)f(x_2)] \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

得到

$$P_2''(x_0 + th) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)]$$



## 高阶数值微分公式（续）

### □ 二阶三点公式

$$P_2''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)]$$

### □ 带余项的二阶三点公式

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

(4.5.5)



## 五点公式

□ 设已给出五个节点  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  上的函数值, 重复同样的手续, 得到

$$m_0 = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)]$$

$$m_1 = \frac{1}{12h} [-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)]$$

$$m_2 = \frac{1}{12h} [f(x_0) - 8f(x_1) + 8f(x_3) - f(x_4)]$$

$$m_3 = \frac{1}{12h} [-f(x_0) + 6f(x_1) - 18f(x_2) + 10f(x_3) + 3f(x_4)]$$

$$m_4 = \frac{1}{12h} [3f(x_0) - 16f(x_1) + 36f(x_2) - 48f(x_3) + 25f(x_4)]$$

■  $m_i$  代表一阶导数  $f'(x_i)$  的近似值





## 五点公式（续）

□ 二阶五点公式如下

$$M_0 = \frac{1}{12h^2} [35f(x_0) - 104f(x_1) + 114f(x_2) - 56f(x_3) + 11f(x_4)]$$

$$M_1 = \frac{1}{12h^2} [11f(x_0) - 20f(x_1) + 6f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)]$$

$$M_2 = \frac{1}{12h^2} [-f(x_0) + 16f(x_1) - 30f(x_2) + 16f(x_3) - f(x_4)]$$

$$M_3 = \frac{1}{12h^2} [-f(x_0) + 4f(x_1) + 6f(x_2) - 20f(x_3) + 11f(x_4)]$$

$$M_4 = \frac{1}{12h^2} [11f(x_0) - 56f(x_1) + 114f(x_2) - 104f(x_3) + 35f(x_4)]$$

■  $M_i$ 表示二阶导数 $f''(x_i)$ 的近似值



## 五点公式（续）

---

- 对于给定的一张数据表，用五点公式求节点上的导数值往往可以获得满意的结果
- 五个相邻节点的选择原则，一般是在所考察的节点的两侧各取两个邻近的节点
- 如果一侧的节点数不足两个（即一侧只有一个节点或没有节点），则用另一侧的节点补足



# 举例

□ 利用  $f(x) = \sqrt{x}$  的一张数据表，按五点公式求节点上的导数值  $m_i, M_i$ ，并与准确值比较

$x_i$	$f(x_i)$	$m_i$	$f'(x_i)$	$M_i / \times 10^3$	$f''(x_i) / \times 10^3$
100	10.000000	0.050000	0.050000	-0.24758	-0.25000
101	10.049875	0.049751	0.049752	-0.24591	-0.24630
102	10.099504	0.049507	0.049507	-0.24191	-0.24268
103	10.148891	0.049267	0.049266	-0.23958	-0.23916
104	10.198039	0.049029	0.049029	-0.23691	-0.23572
105	10.246950	0.048795	0.048795	-0.23666	-0.23236



# 样条求导

□ 样条函数 $S(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数，不但彼此的函数值很接近，导数值也很接近

■ 对于三次样条 $S_3(x)$ ，有

$$\left| f^{(a)}(x) - S_3^{(a)}(x) \right| = O(h^{4-a}) \quad (a = 0, 1, 2, 3)$$

■ 用样条函数建立数值微分公式是很自然的，即

$$f^{(a)}(x) \approx S_3^{(a)}(x) \quad (a = 0, 1, 2, 3) \quad (4.5.6)$$

□ 与前述插值型微分公式(4.5.1)不同，样条微分公式(4.5.6)可以用来计算插值范围内任何一点 $x$ (不仅是节点 $x_k$ )上的导数值



$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.8.9)$$

## 样条求导（续）

### □ 对于等距划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad x_{k+1} - x_k = h$$

### □ 三次样条 $S_3(x)$ 在节点上的导数值 $S'_3(x_k) = m_k$ 满足下列连续性方程

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = 3(y_{k+1} - y_{k-1})/h \quad (4.5.7)$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

- 与公式(2.8.9)一致
- 设已给出端点处一阶导数值 $m_0 = y'_0, m_n = y'_n$ ，则求解方程组(4.5.7)得出的 $m_k$ 即可作为导数 $f'(x_k)$ 的近似值



# 总结

---

## □ 引言

- 积分中值定理、梯形公式、矩形公式
- 机械求积、代数精度、插值型求积公式

## □ Newton-Cotes公式

- 定义、Cotes系数、Newton-Cotes公式的稳定性
- 偶阶求积公式的代数精度、低阶求积公式的余项
- 复化求积法、误差的渐近性

## □ Romberg算法

- 梯形法的递推化、误差的事后估计法
- Romberg公式、Richardson外推加速法



# 总结

---

## □ Gauss公式

- 定义、Gauss点、充分必要条件
- Gauss-Legendre公式
- Gauss公式的余项和稳定性、带权的Gauss公式
- 构造加权Gauss公式的一般方法

## □ 数值微分

- 中点方法、机械求导方法
- 插值型的求导公式、误差分析、样条求导