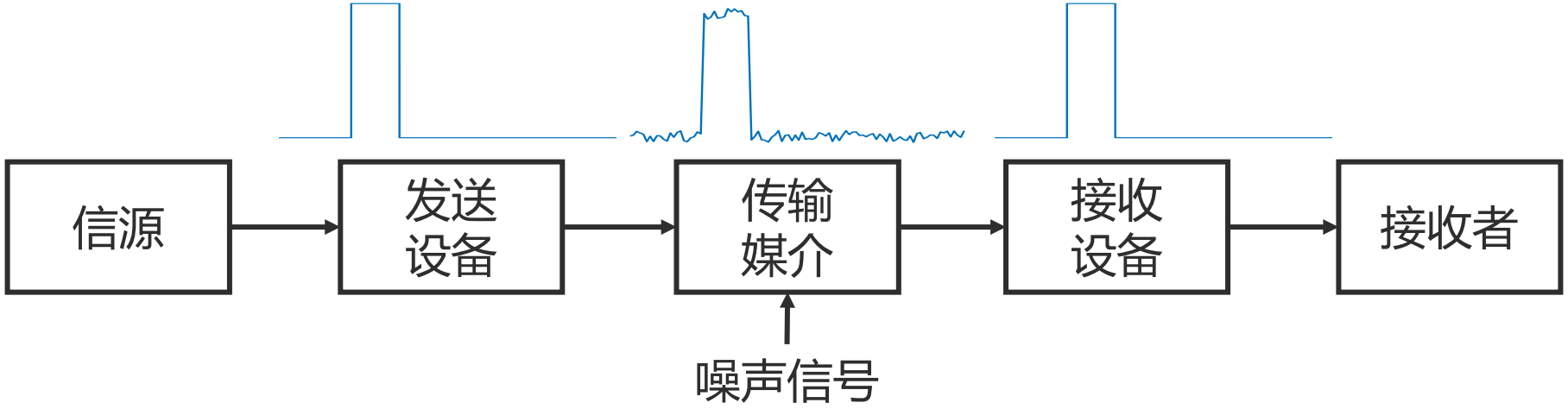
NJUAI 南京大学 人工智能学院
SCHOOL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, NANJING UNIVERSITY
南京大學 NANJING UNIVERSITY 1902

07 调制、解调和滤波

从频域角度“控制”信号

通信系统

- 通信：把发送者拥有的消息传递给接收者
- 为达到通信的目的，
  - 要把信源消息经发送设备转变为适合信道传输的信号，因此需要进行**调制、编码、放大**等操作。
  - 发送和接收设备还可能包括**多路复用、加密、纠错**等处理设备



  - 传输媒介也成为信道，可为导线、电缆、光纤等。混入信道的**噪声**无法避免，在构建通信系统时需要考虑噪声的影响。

通信系统分类

- 按照传输介质分类：
  - 有线信道（电缆、光缆等）
  - 无线信道（长波、中波、短波、微波、光通信）

- 按照频率范围分类，不同波段使用的传输媒质不同
  - 如短波使用同轴电缆

$$\text{波长}(m) = \frac{\text{波速}\ (m/s)}{\text{频率}\ (Hz)}$$

  - 任何频率的无线电波在真空中的传播速度为$3 \times 10^8 m/s$

通信的波段和频段

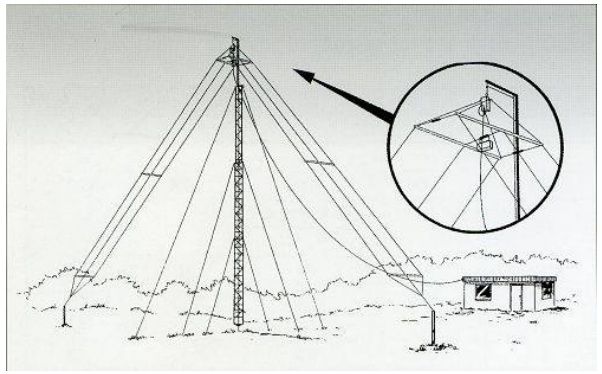
- 高于30 MHz 的电波成为微波
- 长、中、短波所占频带总和约30MHz，而微波频带约300GHz

波段	超长波	长波	中波	短波	超短波	分米波	厘米波	毫米波
频段	甚低频	低频	中频	高频	甚高频	特高频	超高频	极高频
符号	VLF	LF	MF	HF	VHF	UHF	SHF	EHF
波长范围	100000 -10000m	10000 -1000m	1000-100 m	100-10 m	10-1m	1-0.1m	10-1cm	10-1mm
频率范围	3-30kHz	30-300kHz	300kHz -3MHz	3-30M Hz	30 -300MHz	300-3000 MHz	3-30 GHz	30-300G Hz
应用	海岸—潜艇通信；海上导航。	大气层内中等距离通信；地下岩层通信；海上导航。	广播；海上导航。	远距离短波通信；短波广播。	对大气层内、外空间飞行体（飞机、导弹、卫星）的通信；电视、雷达、导航、移动通信。	对流层工散射通信（700-1000MHz）	数字通信；卫星通信；波导通信。	穿入大气层时的通信

通信的频段

波段	超长波	长波	中波	短波	超短波	分米波	厘米波	毫米波
频段	甚低频	低频	中频	高频	甚高频	特高频	超高频	极高频
波长范围	100000 -10000m	10000 -1000m	1000-100 m	100-10 m	10-1m	1-0.1m	10-1cm	10-1mm
频率范围	3-30kHz	30-300kHz	300kHz -3MHz	3-30M Hz	30 -300MHz	300-3000 MHz	3-30 GHz	30-300G Hz

- 天线长度与辐射电波波长数量级一致（1/4波长以上）时，才能有较好的辐射特性，将信号传递到远方。
  - 不同通信波段使用不同尺寸的通信天线
  - 天线尺寸和波长成正比关系



短波天线

微波天线

信道传输

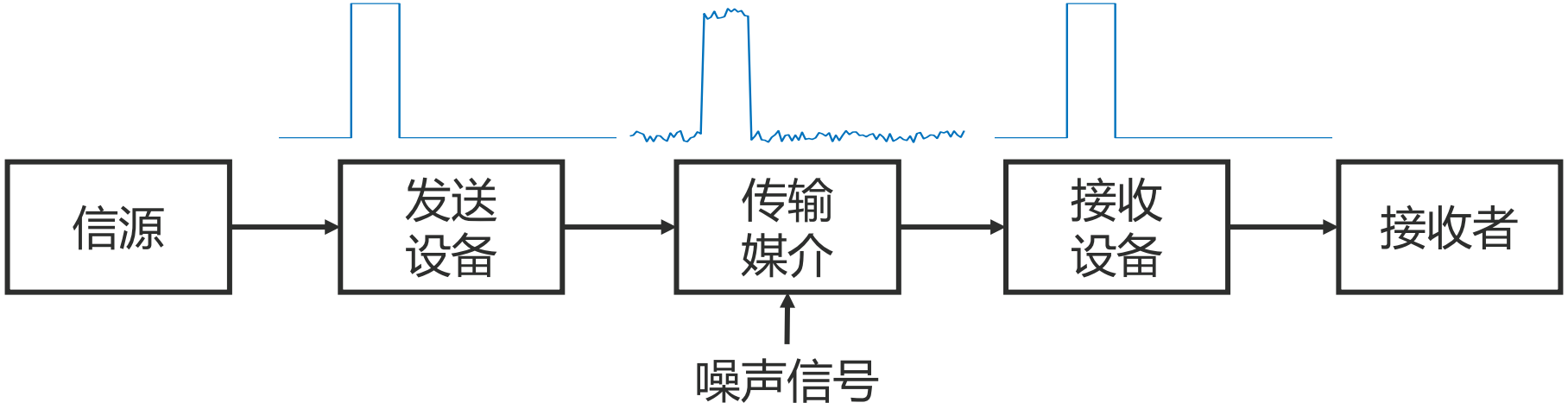
- 频率范围为 20Hz-20kHz的音频信号，在大气层传输时会剧烈衰减，但高频率信号可在大气层中传播到较远距离
- 若音频信号频率为10kHz，直接传输需要7.5km长的天线，需要在大气层中传输音频，需要将低频信号**“加载”或“嵌入”**到一个高频信号上，再通过天线向空间辐射。

波段	超长波	长波	中波	短波	超短波	分米波	厘米波	毫米波
频率范围	3-30kHz	30-300kHz	300kHz -3MHz	3-30MHz	30 -300MHz	300-3000MHz	3-30 GHz	30-300GHz
应用	海岸—潜艇通信；海上导航。	大气层内中等距离通信；地下岩层通信；海上导航。	广播；海上导航。	远距离短波通信；短波广播。	对大气层内、外空间飞行体（飞机、导弹、卫星）的通信；电视、雷达、导航、移动通信。	对流层工散射通信（700-1000MHz）	数字通信；卫星通信；波导通信。	穿入大气层时的通信

信道传输

- 调制：将低频信号“加载”或“嵌入”到一个高频振荡信号上

- 解调：从含有低频信号的高频振荡信号中提取低频信号



信号调制

- 待发送的信号$x(t)$为**调制信号**，用于完成载送信号任务的高频振荡信号$c(t)$为**载波信号**，调制后的高频信号成为已调波。
  - $x(t)$不一定是低频信号

- 载波$c(t)$的某个参数（幅度、频率或相位）随$x(t)$做有规律变化：

$$c(t) = A\cos(\omega_c t + \varphi) = A\cos\big(\theta(t)\big)$$

振荡幅度　　起始相位　　全相位

载波角频率

- 调制过程中，$A, \omega_c, \varphi, \theta(t)$都可以随$x(t)$变化

信号调制

- 载波$c(t)$的某个参数（幅度、频率或相位）随$x(t)$做有规律变化：

$$c(t) = A\cos(\omega_c t + \varphi) = A\cos\big(\theta(t)\big)$$

振荡幅度　　起始相位　　全相位

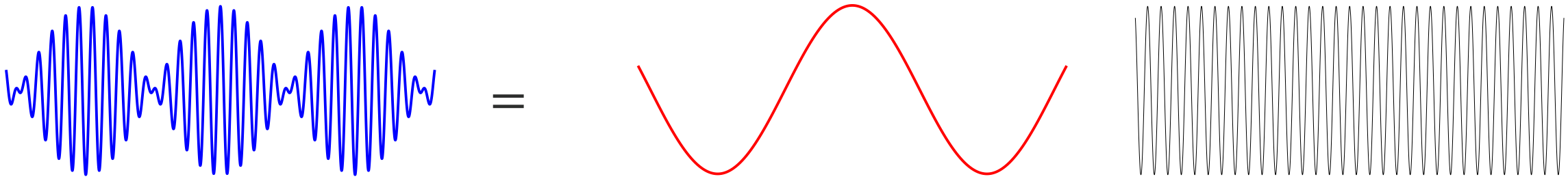
载波角频率

- 幅度调制 （Amplitude Modulation，AM）
  - A随$x(t)$线性改变，而ω_c, φ不变
- 角度调制
  - $\theta(t)$随$x(t)$线性改变，而A不变，分为频率调制（FM）和相位调制（PM）

正弦载波调幅

- 信号调幅，设置$c(t)$为正弦信号
- 为使幅度A随调制信号$x(t)$线性变化（将$x(t)$嵌入$c(t)$），将二者相乘：

$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$



$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$

正弦载波调幅

- 信号调幅，设置$c(t)$为正弦信号，设载波信号$c(t) = \cos(\omega_c t)$
- 为使幅度A随调制信号$x(t)$线性变化（将$x(t)$嵌入$c(t)$），将二者**相乘**：

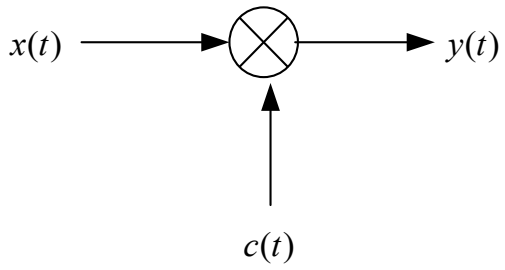
$$y(t) = x(t) \cdot c(t) \ = x(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

- 设 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$
- 由于$\cos(\omega_c t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$
- 根据调制定理

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[X\big(j(\omega + \omega_c)\big) + X\big(j(\omega - \omega_c)\big)\right] \end{aligned}$$

调制后，原始频谱
幅度减半，左右移动

正弦载波调幅

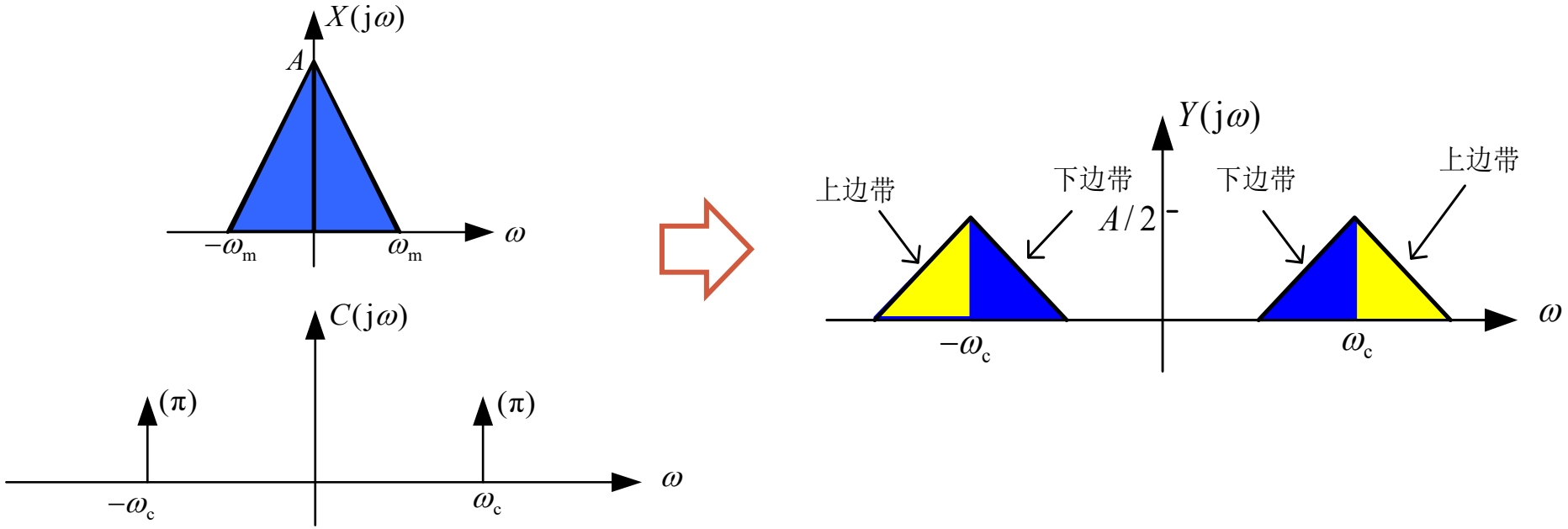


幅度调制方块图

- 为使幅度A随调制信号$x(t)$线性变化（将$x(t)$嵌入$c(t)$），将二者相乘：

$$y(t) = x(t) \cdot c(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

  - 若$\omega_c > \omega_m$，则两部分频谱不会发声重叠
  - 调制前后**总能量不变**



复指数载波调制

- 设 $c(t) = e^{j(\omega_c t+\varphi)}$，$\varphi = 0$ 进行调幅，可得

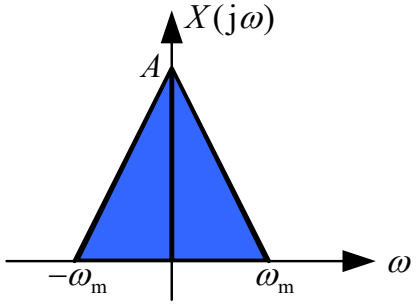
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * 2\pi[\delta(\omega-\omega_c)]\right]$$
$$= X\big(j(\omega-\omega_c)\big)$$

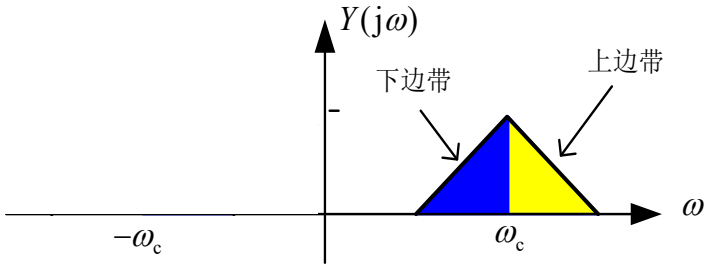
- 不要求$\omega_c > \omega_m$

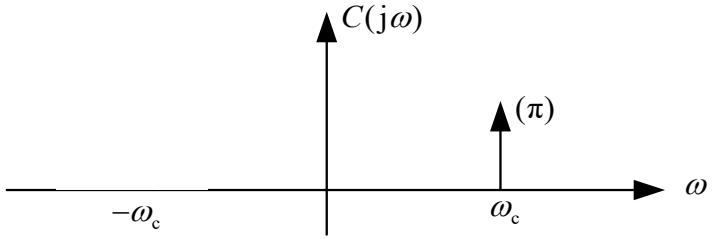
- 可通过滤波法（高通、低通滤波器）分别得到上下边带

- 复指数信号的产生

$$c(t) = e^{j(\omega_c t+\varphi)} = \cos(\omega_c t+\varphi) + j\sin(\omega_c t+\varphi)$$

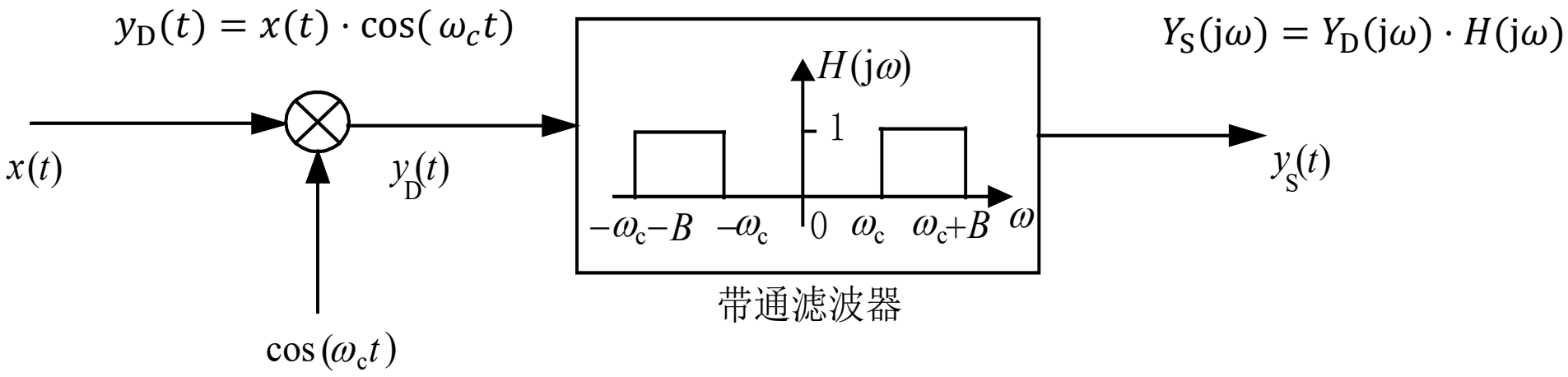






单边带调幅

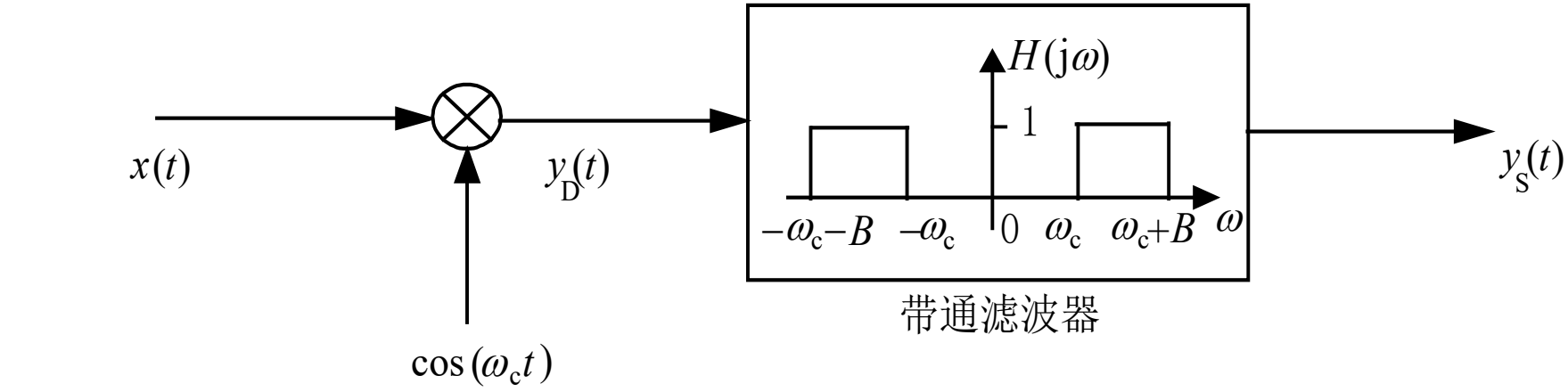
- 单边带调制：只发送上边带或者下边带信号，节省能量和带宽
- 采用带通滤波器实现单边带幅度调制
  - 上边带调制框图：改变带通滤波器的通频带可实现下边带调制

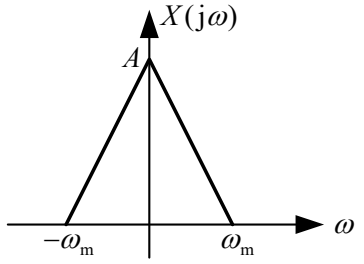


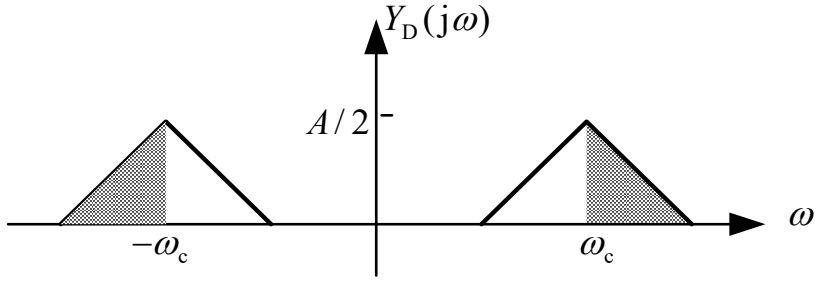
$$Y_D(j\omega) = \frac{1}{2}\{X[j(\omega + \omega_c)] + X[j(\omega - \omega_c)]\}$$

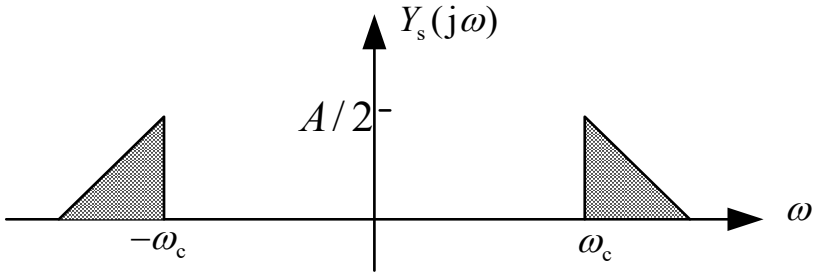
单边带调幅

- 单边带调制：只发送上边带或者下边带信号，节省能量和带宽
- 采用带通滤波器实现单边带幅度调制
  - 上边带调制框图：改变带通滤波器的通频带可实现下边带调制









同步解调

- 从$y(t)$中恢复出$x(t)$，即从$Y(j\omega)$中恢复出$X(j\omega)$
- 由于

$$y(t) = x(t) \cdot c(t) \ = x(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

- 为移回$X(j\omega)$，用$\cos(\omega_c t)$再次乘$y(t)$

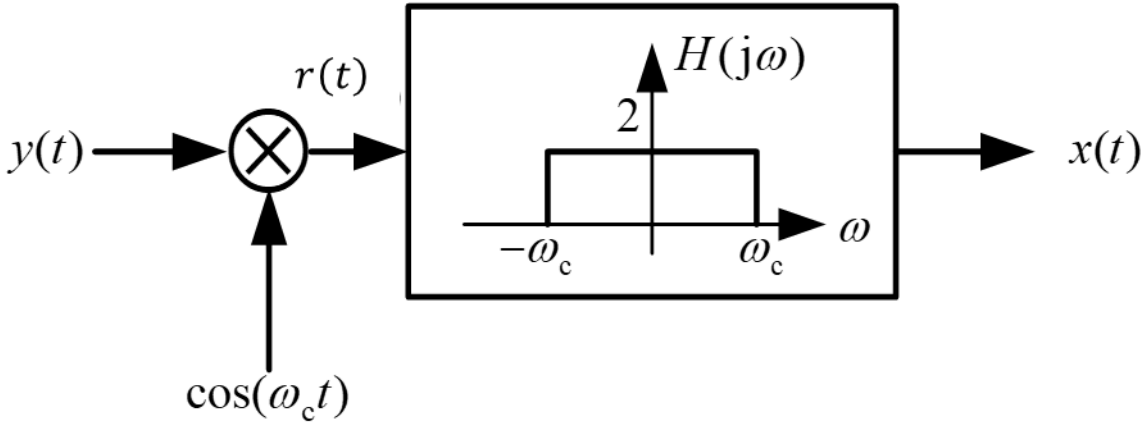
$$r(t) = y(t)\cos(\omega_c t) = x(t)\cos^2(\omega_c t) = x(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\right) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t)$$

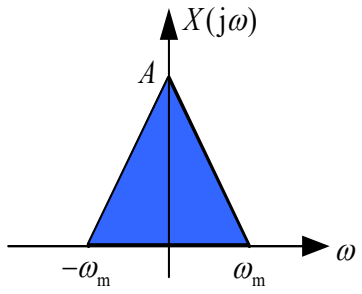
- 因此

$$R(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}\left[X\big(j(\omega + 2\omega_c)\big) + X\big(j(\omega - 2\omega_c)\big)\right]$$

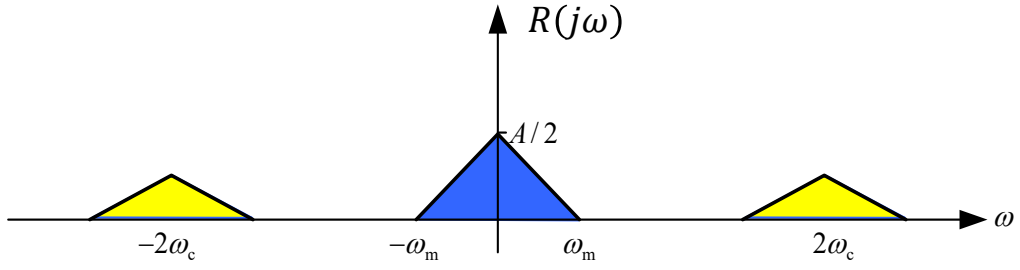
同步解调

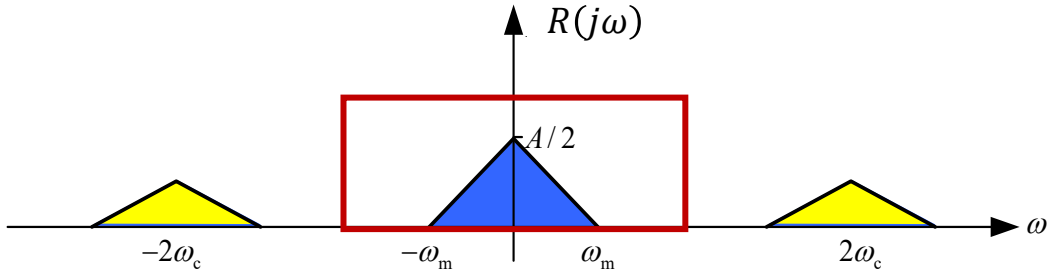
- 解调后，原始信号信息保存完好，仅有1/2系数差别





滤波器带宽需要
满足$\omega_m < B < 2\omega_c - \omega_m$

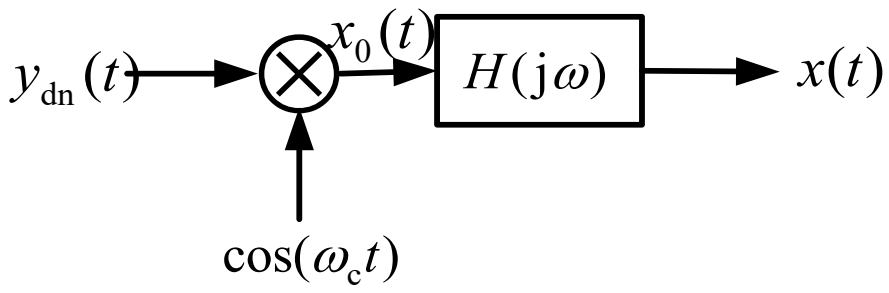


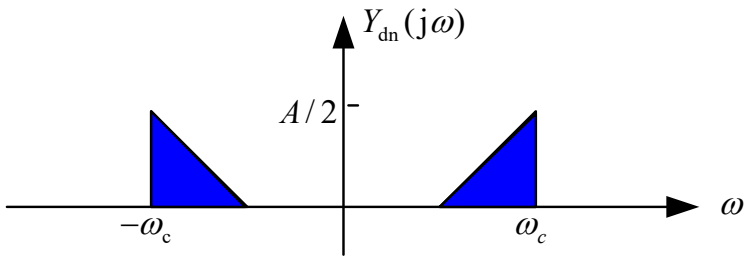


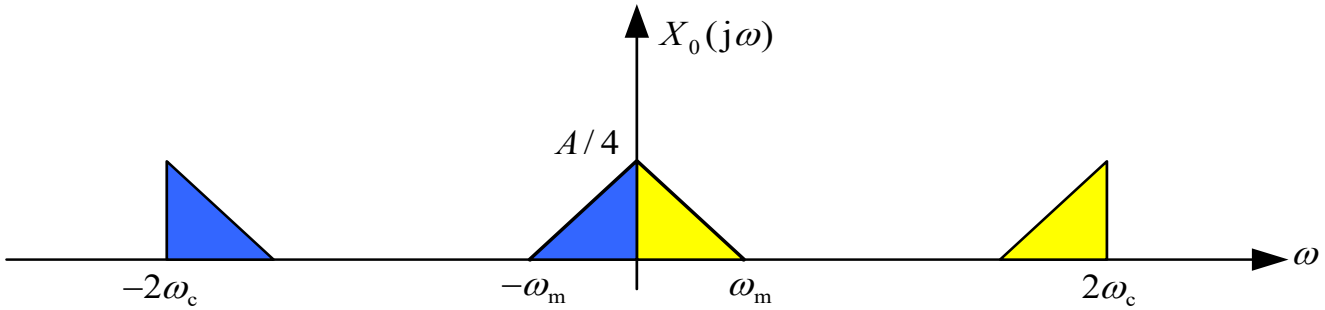
单边带调幅

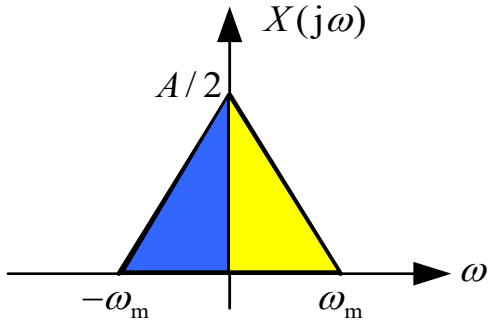
- 单边带幅度调制已调信号的解调
  - 采用同步解调

$$X_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\{Y_{\mathrm{dn}}[\mathrm{j}(\omega+\omega_{\mathrm{c}})] + Y_{\mathrm{dn}}[\mathrm{j}(\omega-\omega_{\mathrm{c}})]\}$$



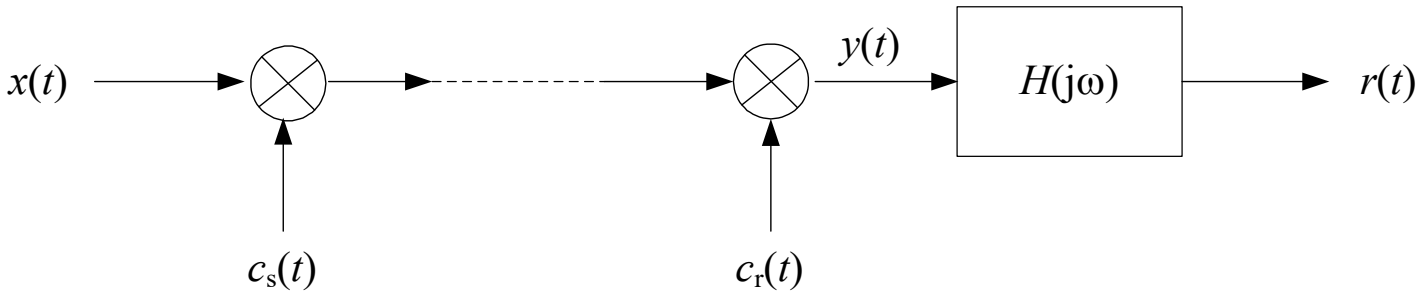






收发端相位不等遇到的问题

- 若调制与解调端载波**相位不等**，则解调后的信号将会**失真**



$$r(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \varphi)\cos(\omega_c t + \theta)$$

$$= x(t)\left[\frac{1}{2}\cos(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}x(t)\cos(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta)$$

收发端相位不等遇到的问题

- 若调制与解调端载波**相位不等**，则解调后的信号将会失真

$$r(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \varphi)\cos(\omega_c t + \theta)$$

$$= \frac{1}{2}x(t)\cos(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta)$$

- 采样同步解调同样的滤波方案，滤波器输出为

$$x(t)\cos(\varphi - \theta)$$

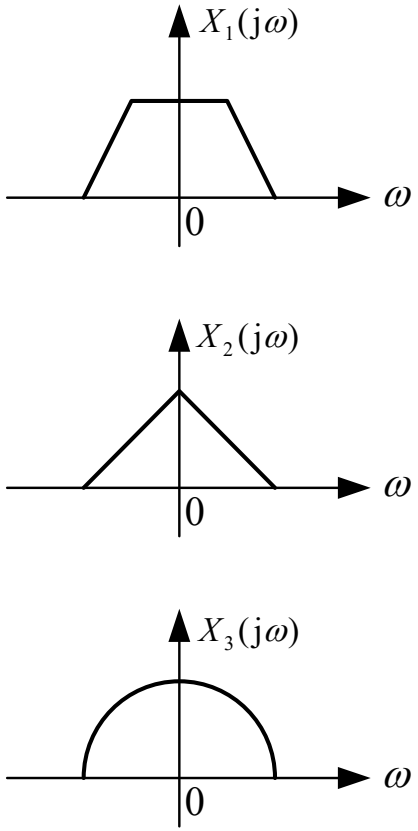
- 因此

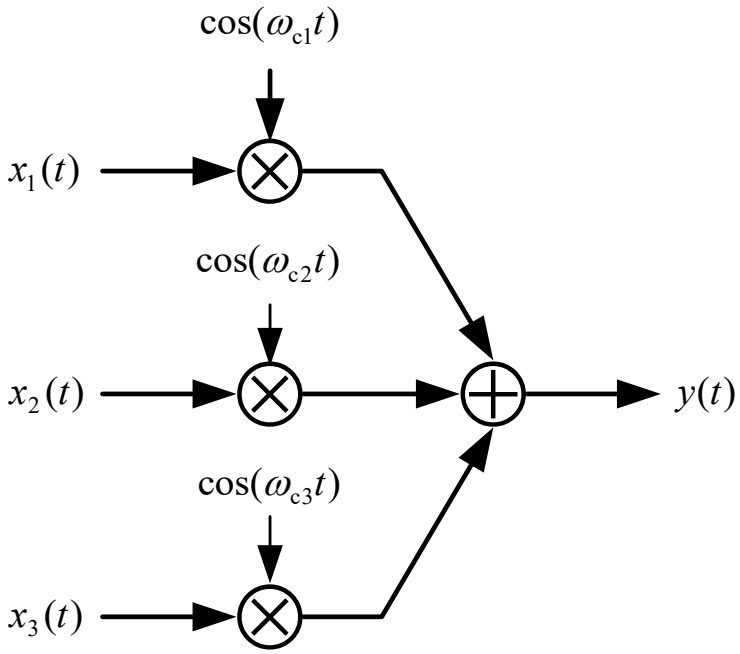
$$r(t) = \begin{cases} x(t), & \varphi = \theta \\ 0, & \varphi - \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

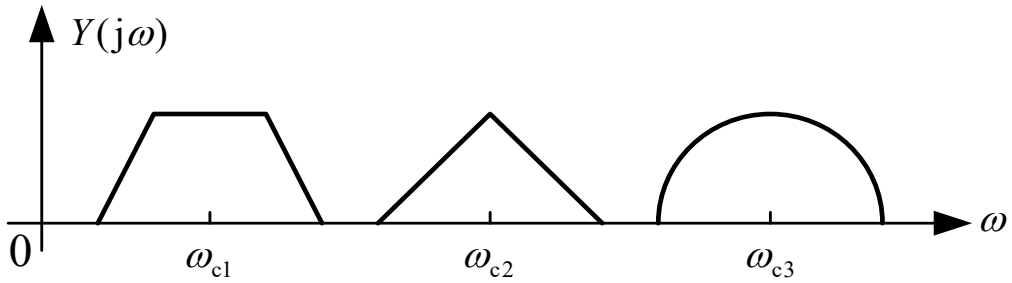
- 相位差为$\frac{\pi}{2}$时，无法恢复信号

信道复用：频分复用

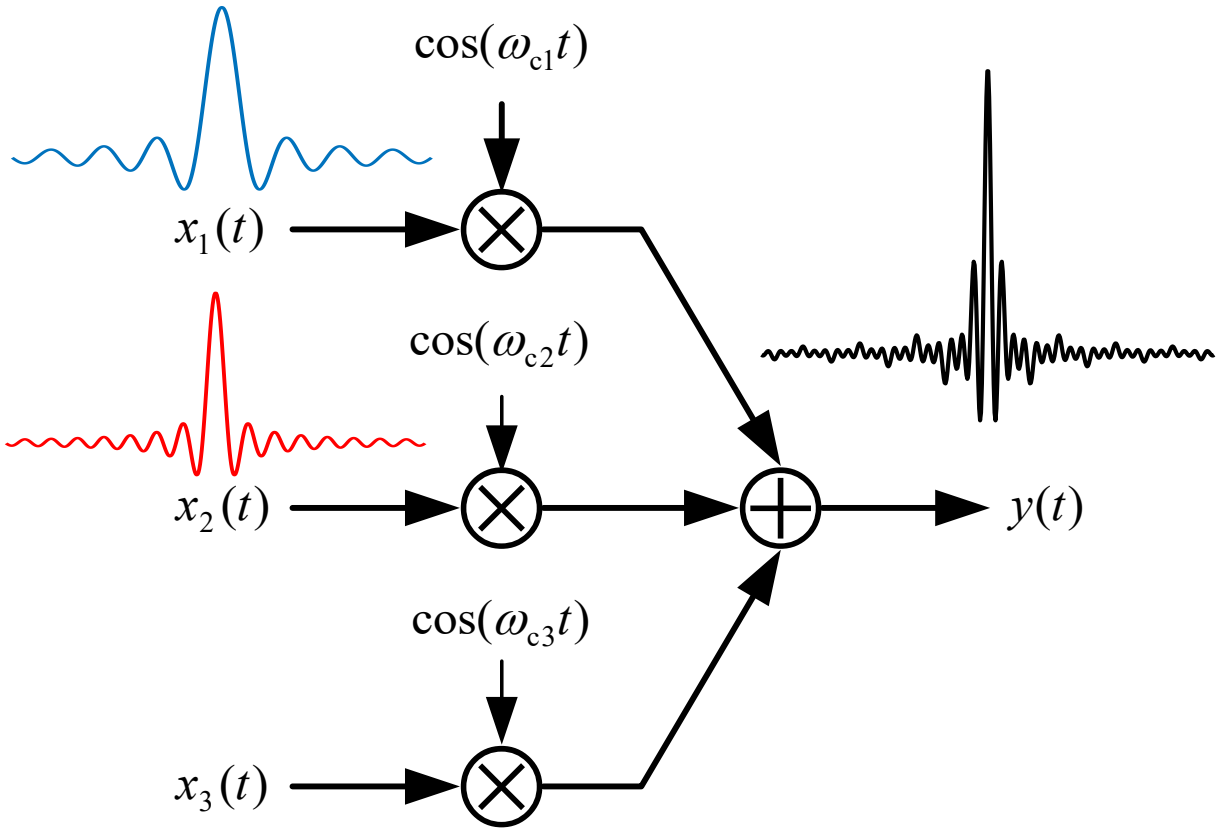
- 频分复用（Frequency-division multiplexing，FDM）
- 不同信号占用不同的频带

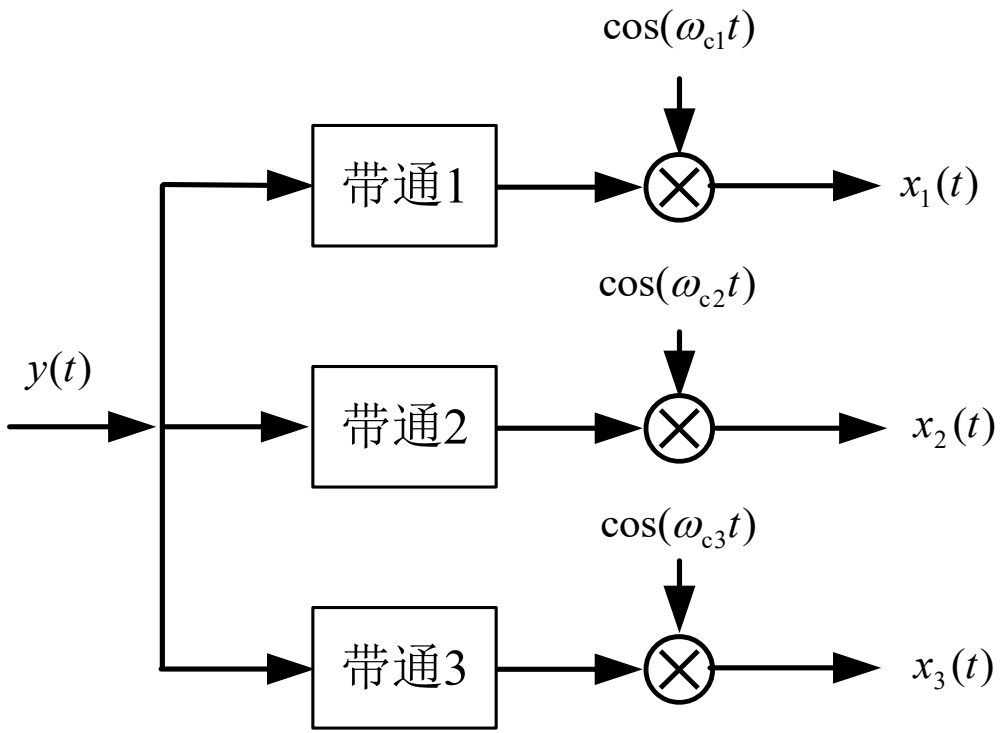


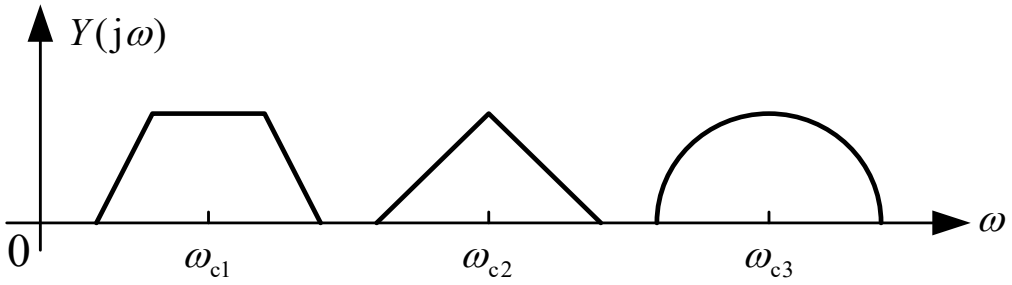


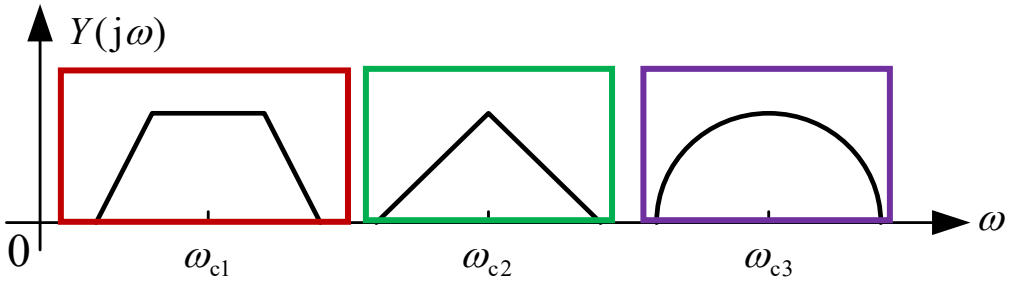


信道复用：频分复用


$\cos(\omega_{c1}t)$
$x_1(t)$
$\cos(\omega_{c2}t)$
$x_2(t)$
$y(t)$
$\cos(\omega_{c3}t)$
$x_3(t)$

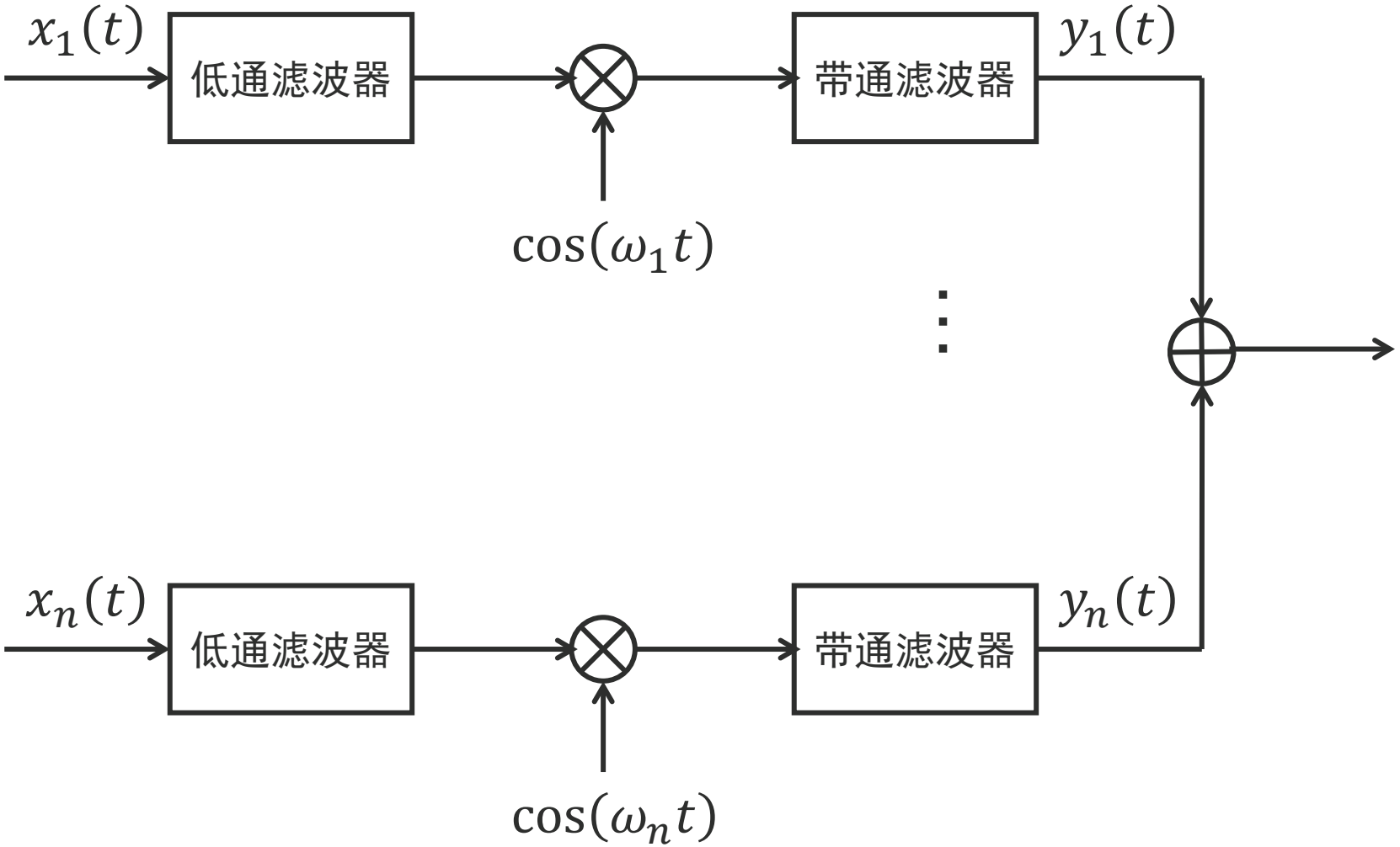

$\cos(\omega_{c1}t)$
带通1
$x_1(t)$
$\cos(\omega_{c2}t)$
$y(t)$
带通2
$x_2(t)$
$\cos(\omega_{c3}t)$
带通3
$x_3(t)$


$Y(j\omega)$
0
ω_{c1}
ω_{c2}
ω_{c3}
ω


$Y(j\omega)$
0
ω_{c1}
ω_{c2}
ω_{c3}
ω

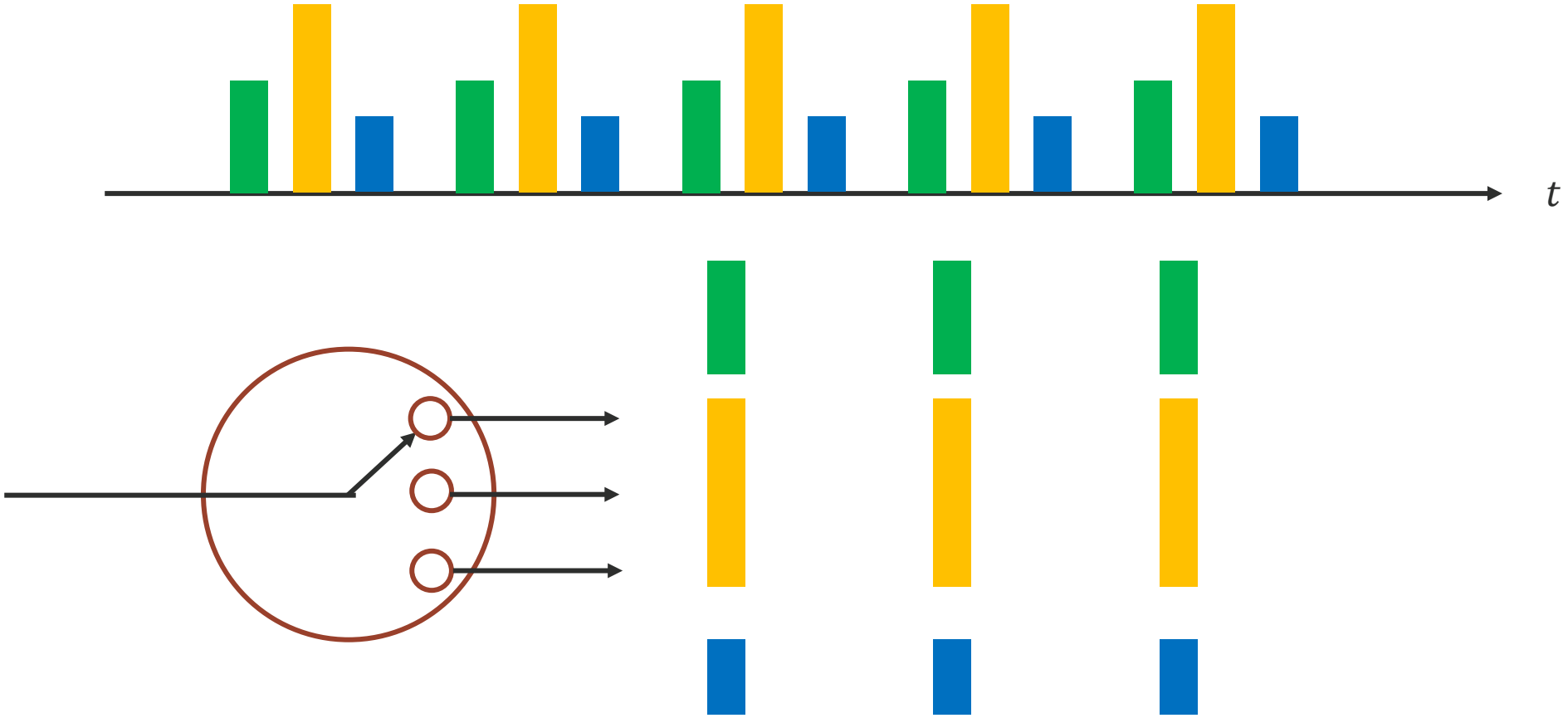
信道复用：频分复用

- 频分复用的进一步完善



信道复用：时分复用

- 时分复用（Time-Division Multiplexing，TDM）
  - 时分复用的基础是抽样定理



信道复用：码分复用

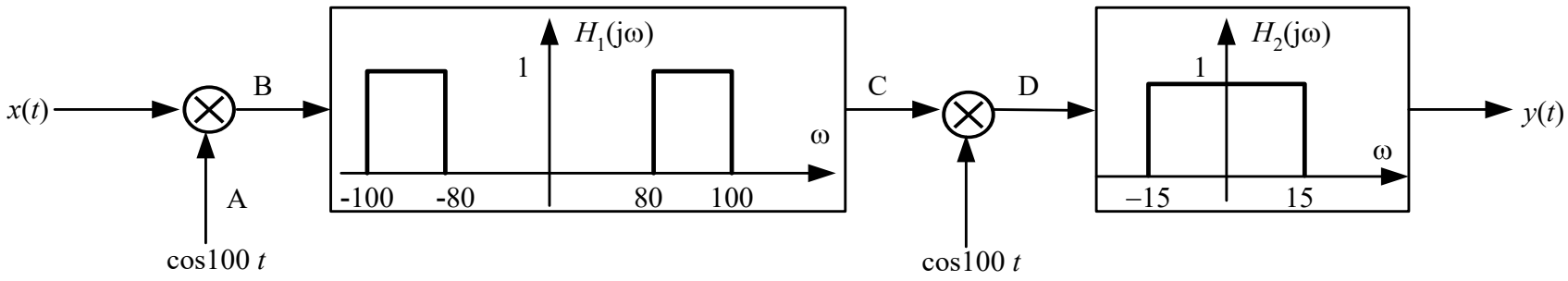
- 码分复用（Code Division Multiplexing， CDM）
- 对信号乘**正交**随机码
  - 由于信号正交，因此可以恢复
  - 码分多址通信：CDMA, Code Division Multiple Access

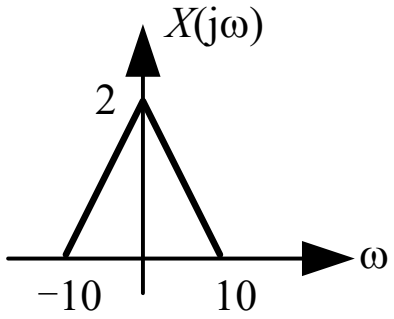
$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \cdot c_i(t)$$

- 发送端信号$x_1(t), x_2(t)$
- 发送时乘正交信号发送：$x_1(t)\sin(\omega_c t)$，$x_2(t)\cos(\omega_c t)$
- 接收时再乘$\sin(\omega_c t)$，$\cos(\omega_c t)$进行恢复

系统频谱分析

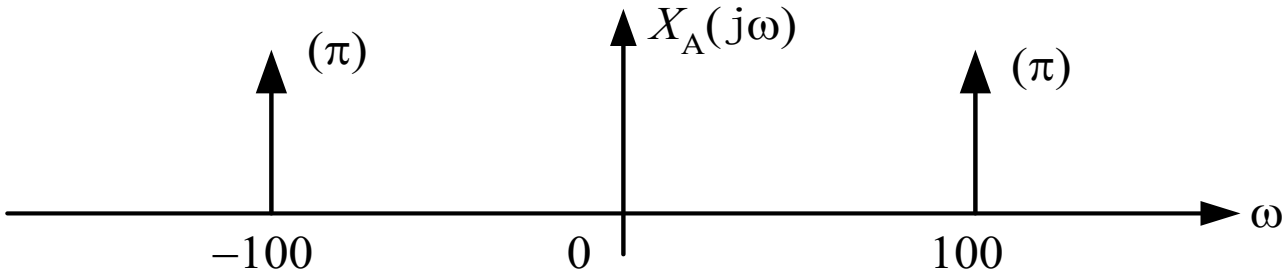
如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系





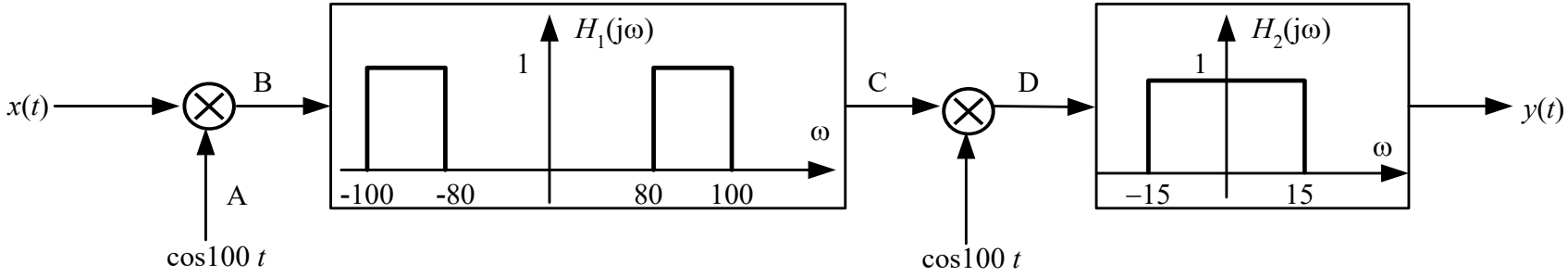
- A点

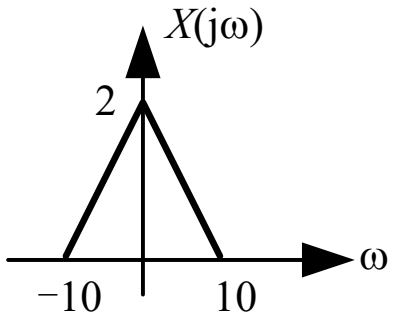
$$X_A(j\omega) = \mathcal{F}[\cos(100t)] = \pi[\delta(\omega - 100) + \delta(\omega + 100)]$$



系统频谱分析

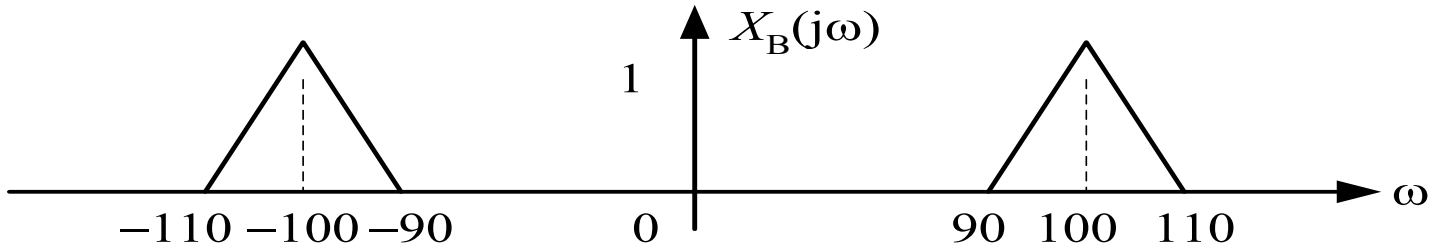
如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系





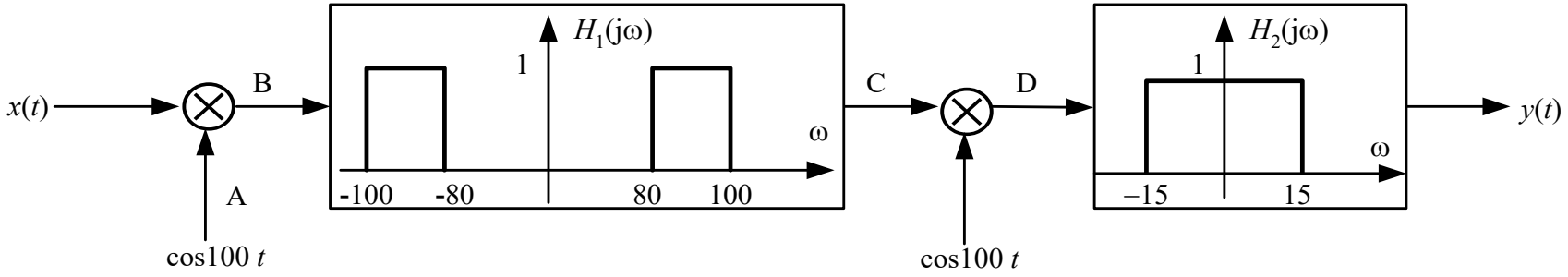
- B点

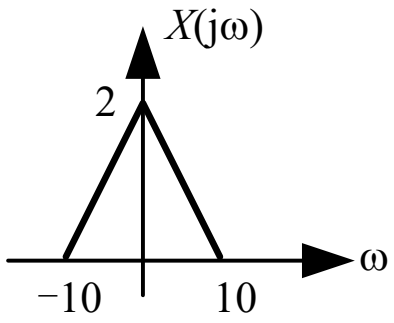
$$X_{\mathrm{B}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega)*X_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega-100)+X(\omega+100)]$$



系统频谱分析

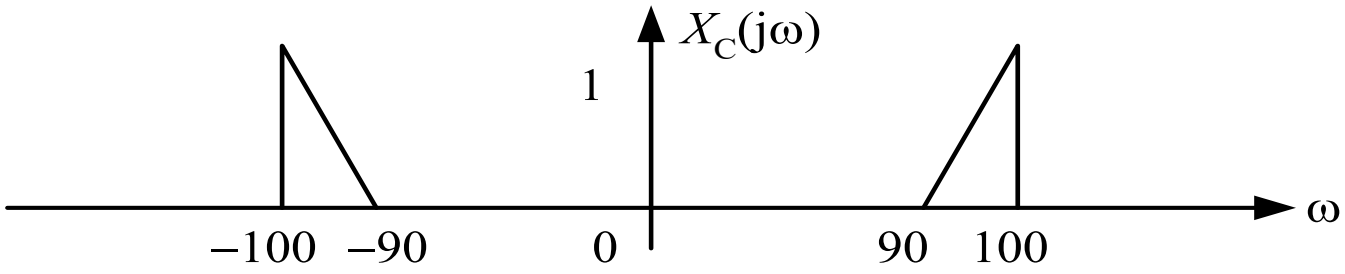
如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系





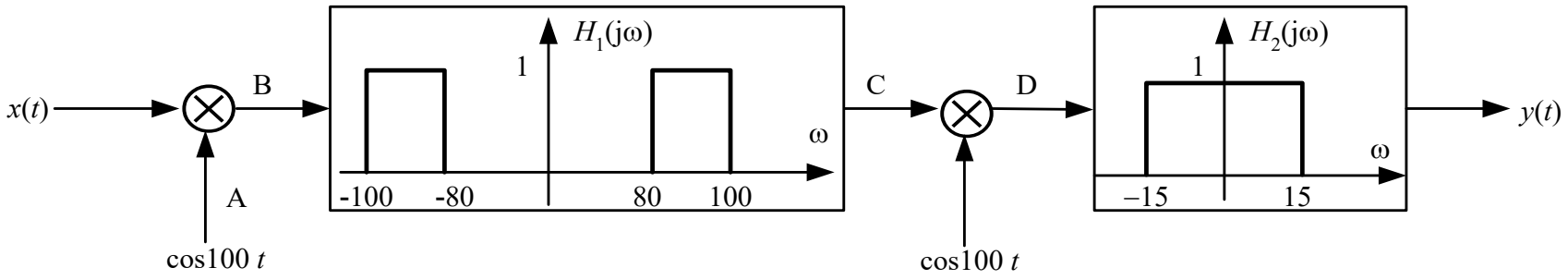
- C点

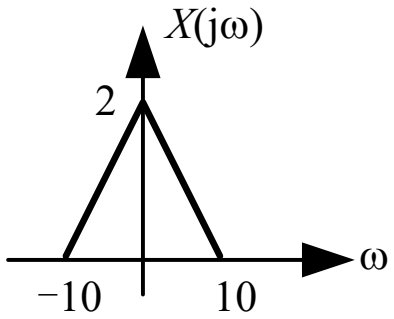
$$X_C(j\omega) = X_B(j\omega)H_1(j\omega)$$



系统频谱分析

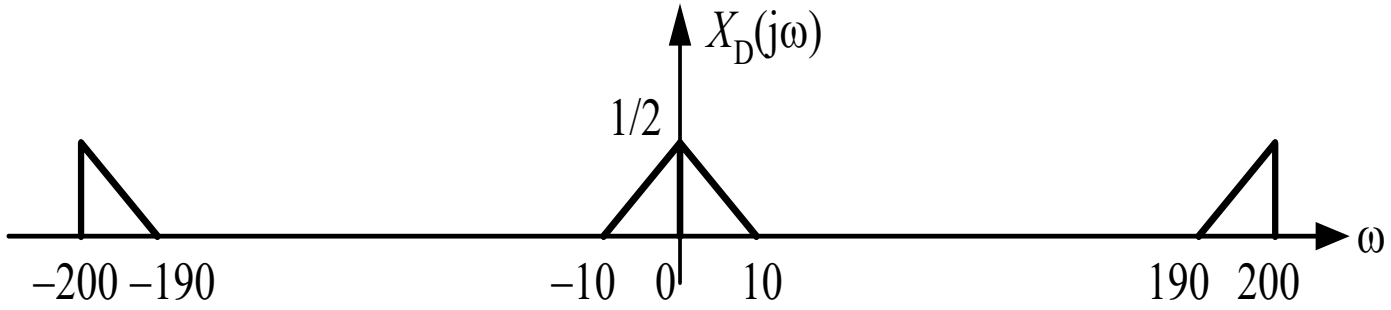
如图所示系统中，已知输入信号$x(t)$的频谱$X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系





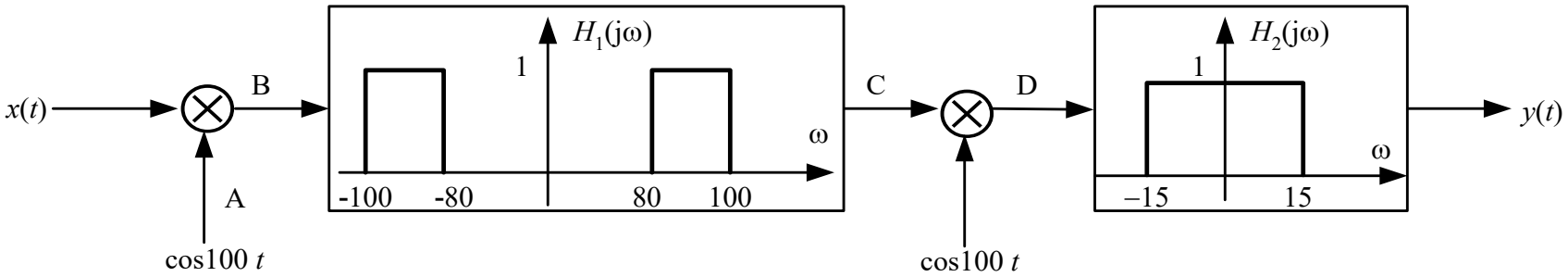
- D点

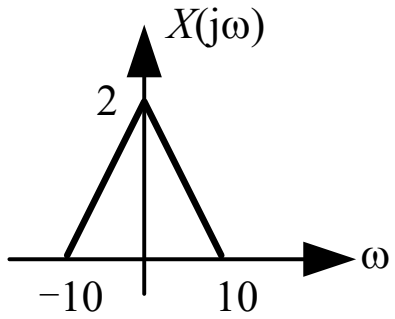
$$X_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[X_{\mathrm{C}}(\omega+100)+X_{\mathrm{C}}(\omega-100)]$$



系统频谱分析

如图所示系统中，已知输入信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$，试分析系统中A、B、C、D各点及$y(t)$的频谱并画出频谱图，求出$y(t)$与$x(t)$的关系



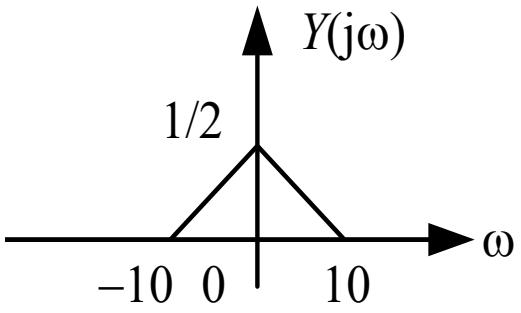


- 由于$Y(\mathrm{j}\omega) = X_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega)$

$$Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{4}X(\mathrm{j}\omega)$$

- 因此

$$y(t) = \frac{1}{4}x(t)$$



频域分析的应用

1. 频域分析的应用-1：
图卷积

2. 频域分析的应用-2：
频域角度分析模型泛化能力

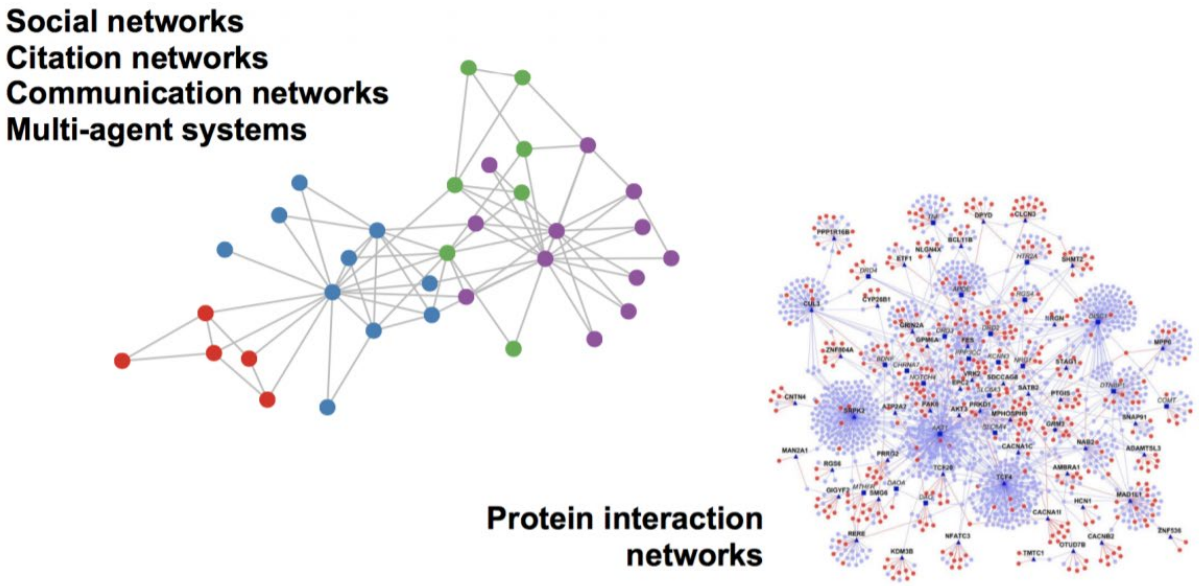
3. 频域分析的应用-3：
频域角度进行图像纠偏

图卷积网络（GCN ）

- Graph Convolutional Network (GCN)
- 图：$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, A)$, $\mathcal{V}$为结点集合， A表示两两结点之间边的权重，a_{ij} =0表示没有边
- Degree Matrix

$$D = diag(d_1, \dots, d_i, \dots, d_n),\ \ d_i = \sum_j a_{ij}$$

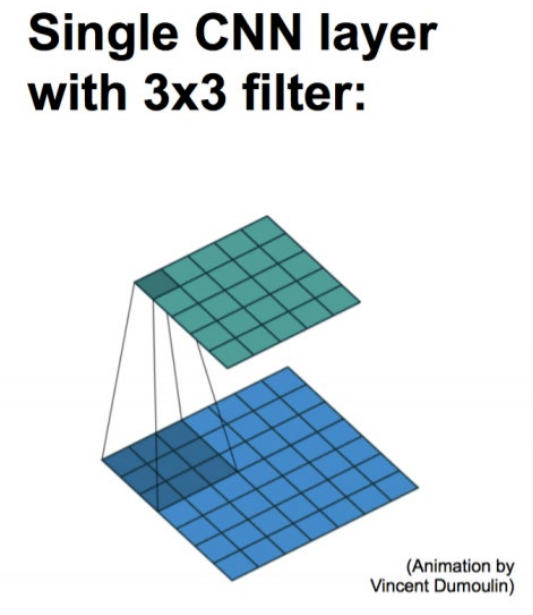
- $\tilde{A} = A + I$对应的Degree Matrix为$\widetilde{D}$
- n个结点，特征为X，结点共C类
- 对结点进行分类

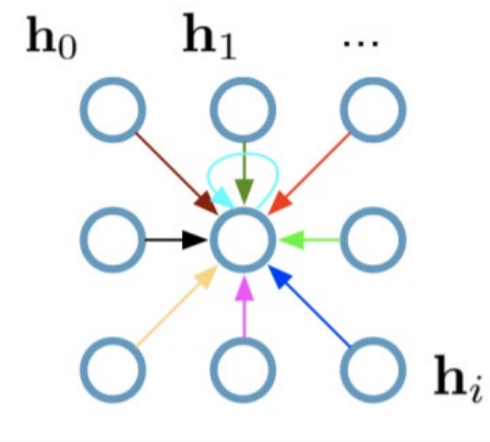


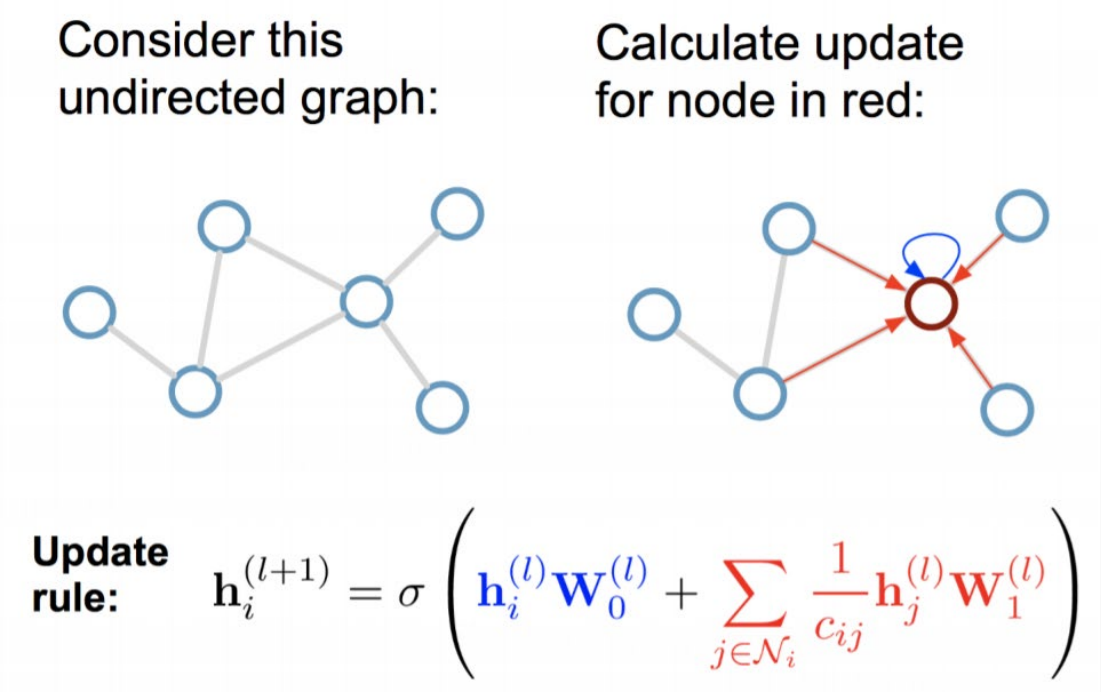
https://www.cs.ubc.ca/~lsigal/532S_2018W2/Lecture18a.pdf

图卷积

- 传统卷积
- 图卷积（类比）







After k layers a node obtains feature information from all nodes that are k −hops away in the graph.

图卷积网络（GCN ）

- Graph Convolutional Network
  - Feature propagation: 结点之间特征融合

$$\bar{\mathbf{h}}_i^{(k)} \leftarrow \frac{1}{d_i+1}\mathbf{h}_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{\sqrt{(d_i+1)(d_j+1)}}\mathbf{h}_j^{(k-1)}; \qquad \bar{\mathbf{H}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{S}\mathbf{H}^{(k-1)},\ \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}$$

  - Feature transformation: 结点特征非线性变换

$$\mathbf{H}^{(k)} \leftarrow \mathrm{ReLU}\left(\bar{\mathbf{H}}^{(k)}\boldsymbol{\Theta}^{(k)}\right)$$

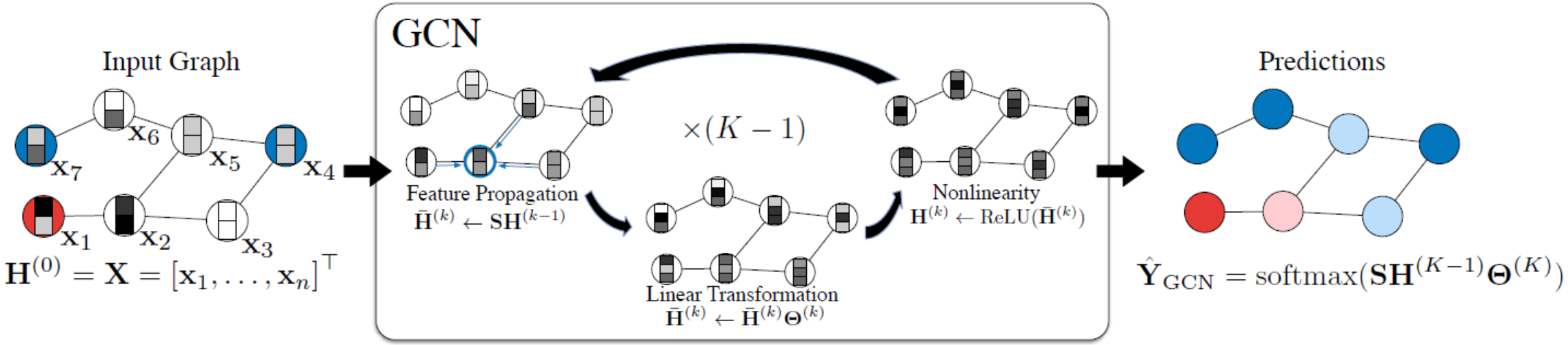
  - Classifier:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\mathrm{GCN}} = \mathrm{softmax}\left(\mathbf{S}\mathbf{H}^{(K-1)}\boldsymbol{\Theta}^{(K)}\right)$$

Thomas N. Kipf, Max Welling. Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. ICLR 2017

图卷积网络（GCN ）

- Graph Convolutional Network
  - Feature propagation: 结点之间特征融合： $\bar{\mathbf{H}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{S}\mathbf{H}^{(k-1)}$, $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}$
  - Feature transformation: 结点特征非线性变换： $\mathbf{H}^{(k)} \leftarrow \mathrm{ReLU}\left(\bar{\mathbf{H}}^{(k)}\boldsymbol{\Theta}^{(k)}\right)$
  - Classifier: $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathrm{GCN}} = \mathrm{softmax}\left(\mathbf{S}\mathbf{H}^{(K-1)}\boldsymbol{\Theta}^{(K)}\right)$



图卷积（谱分析）

- 针对**图**的傅里叶变换
- 定义Graph Laplacian (半正定矩阵)

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$$

特征值分解为$\Delta = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\top}$

- 对于结点空间中的$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，**图傅里叶变换**为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathcal{F}[\mathbf{x}] = \mathbf{U}^{\top}\mathbf{x}$$

逆变换为

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{U}\hat{\mathbf{x}}$$

- 由卷积定理，**结点信号**$\mathbf{x}$和**图的单位脉冲响应**$\mathbf{g}$的图卷积

$$\mathbf{g} * \mathbf{x} = \mathbf{U}\left(\left(\mathbf{U}^{\top}\mathbf{g}\right) \odot \left(\mathbf{U}^{\top}\mathbf{x}\right)\right) = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{G}}\mathbf{U}^{\top}\mathbf{x}$$

图卷积（谱分析）

- 定义Graph Laplacian $\Delta = D - A$，特征值分解为$\Delta = U\Lambda U^\top$
- 由卷积定理，结点信号$\mathbf{x}$和图的单位脉冲响应$\boldsymbol{g}$的图卷积

$$\mathbf{g} * \mathbf{x} = \mathbf{U}\left(\left(\mathbf{U}^\top \mathbf{g}\right) \odot \left(\mathbf{U}^\top \mathbf{x}\right)\right) = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{G}}\mathbf{U}^\top \mathbf{x}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{k} \theta_i \boldsymbol{\Delta}^i \mathbf{x} = \mathbf{U}\left(\sum_{i=0}^{k} \theta_i \boldsymbol{\Lambda}^i\right)\mathbf{U}^\top \mathbf{x}$$

$$\widehat{\mathbf{G}} = \sum_{i} \theta_i \boldsymbol{\Lambda}^i$$

- 简化，令$k = 1$:

$$\mathbf{g} * \mathbf{x} = \theta\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2}\right)\mathbf{x}$$

- renormalization trick, $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{I}, \widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{I}$

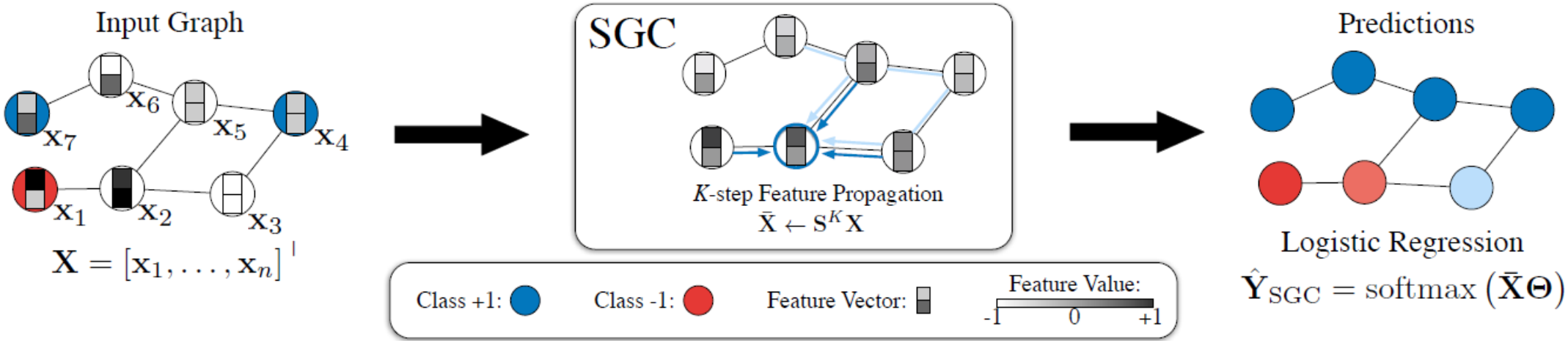
$$\mathbf{S} = \widetilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}$$

简化图卷积网络（SGC ）

- Simple Graph Convolution
  - 消除所有**非线性**算子

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathrm{softmax}\left(\mathbf{S} \ldots \mathbf{SSX\Theta}^{(1)}\mathbf{\Theta}^{(2)} \ldots \mathbf{\Theta}^{(K)}\right); \qquad \hat{\mathbf{Y}}_{\mathrm{SGC}} = \mathrm{softmax}\left(\mathbf{S}^K\mathbf{X\Theta}\right)$$

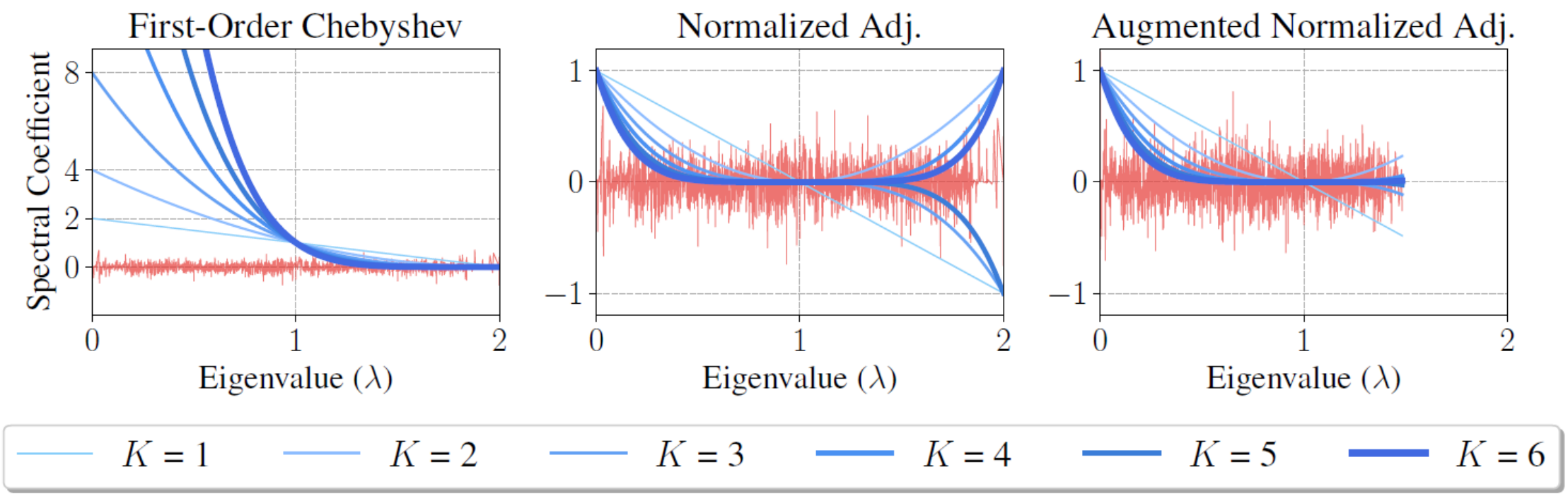
  - 简化为 特征变换$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{S}^K\mathbf{X}$ + Logistic Regression
  - 适用于**大型稀疏**图网络



Wu et al. Simplifying Graph Convolutional Networks. ICML 2019

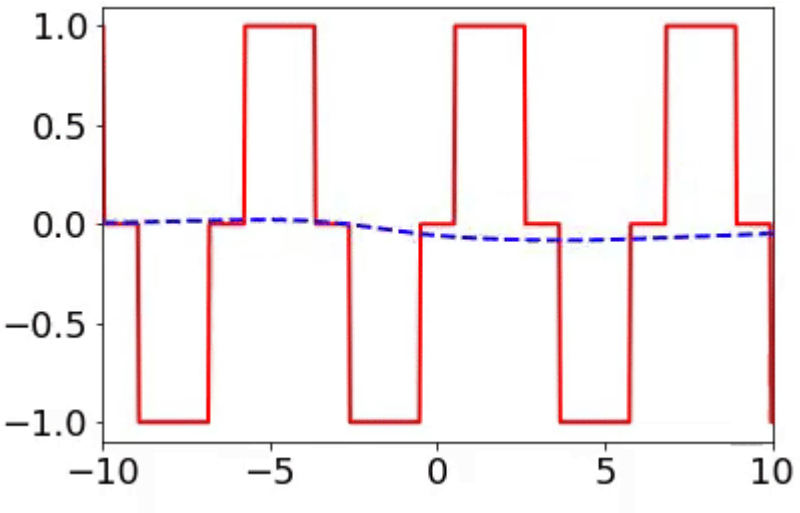
SGC（谱分析）

- SGC对应于图谱域（Graph Spectral Domain）的**低通**滤波器
  - 使结点特征更加平滑（相似结点特征相似，预测结果相似）



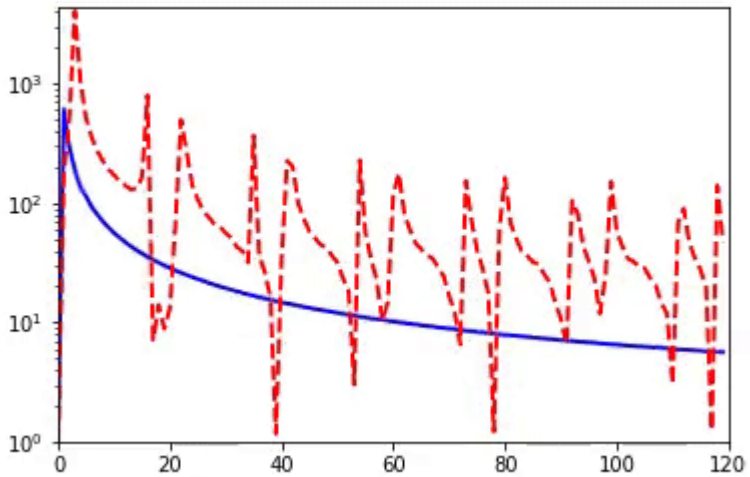
F-Principle

- ***DNNs often fit target functions from low to high frequencies during the training.***



时域：回归问题（红色为拟合目标）

DNNs often fit target functions from landscape to detail.

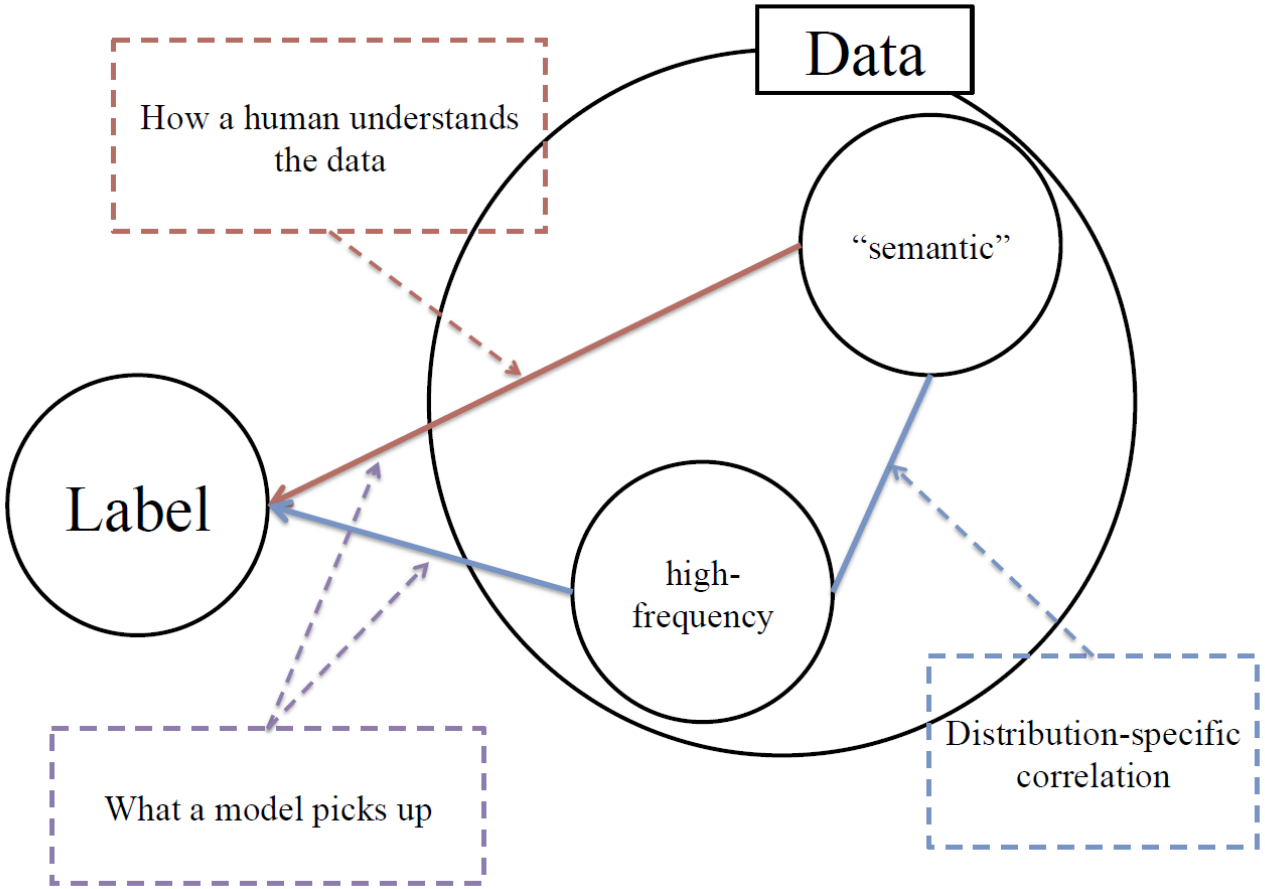


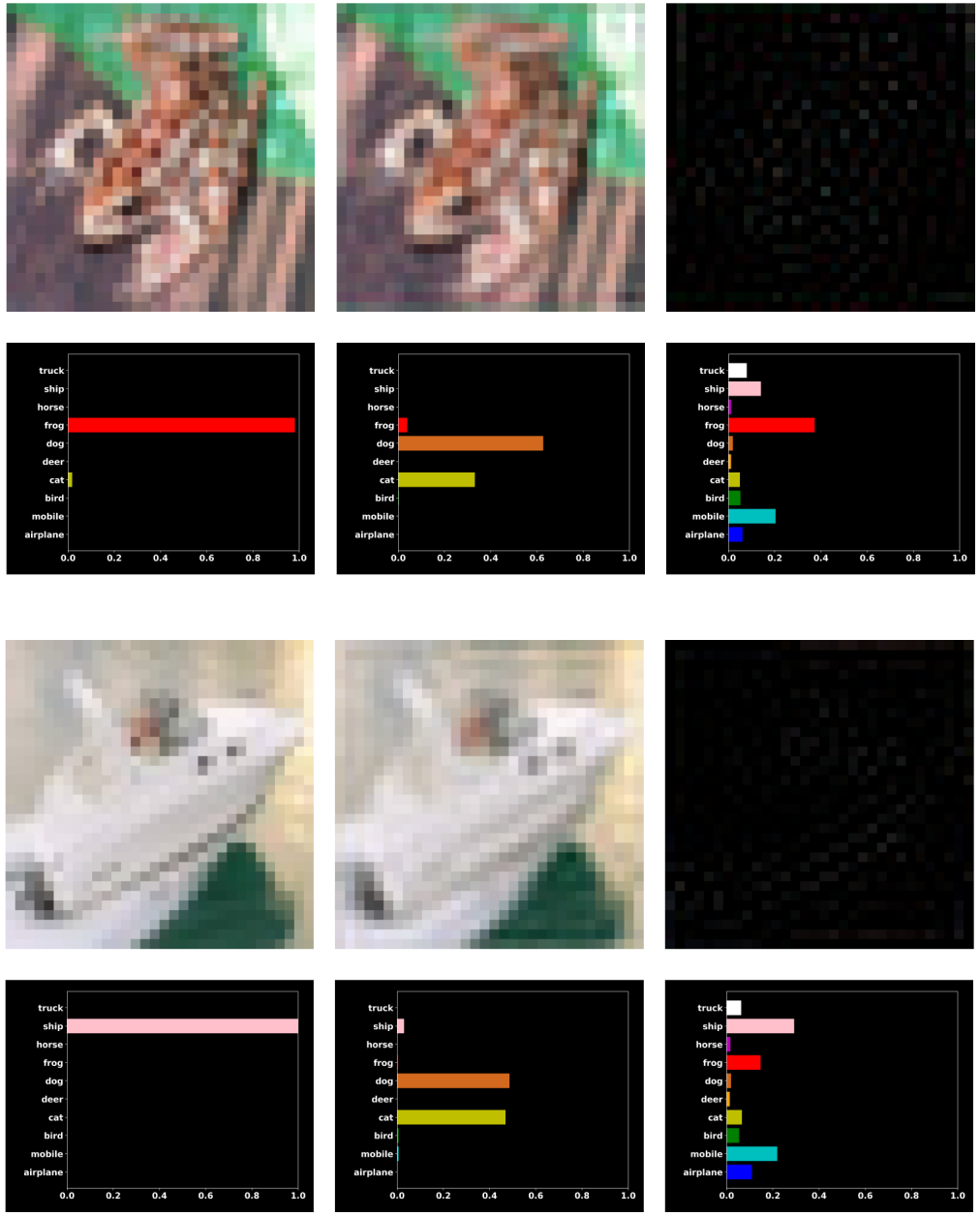
频域：回归问题（红色为拟合目标的傅里叶变换）

DNNs often fit target functions from low to high frequencies.

https://ins.sjtu.edu.cn/people/xuzhiqin/fprinciple/index.html

模型对高频信号的处理





Haohan Wang et al. High-Frequency Component Helps Explain the Generalization of Convolutional Neural Networks. CVPR 2020.

模型对高频信号的处理

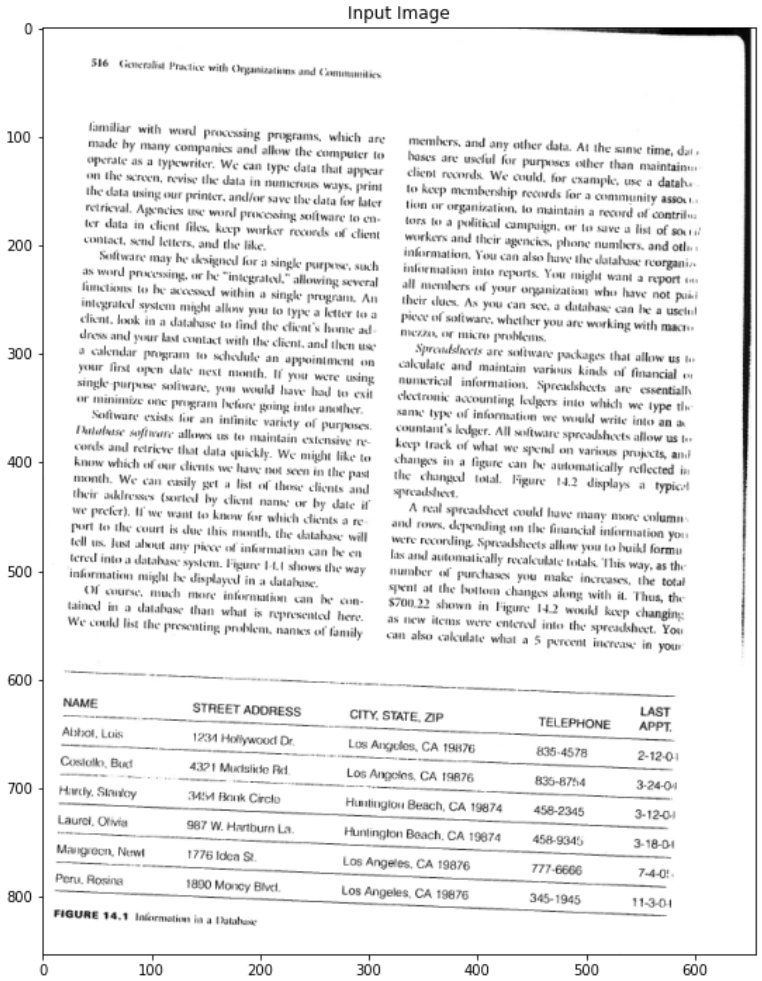
- 人类的判别：关注低频的语义信息
- 模型的判别：同时关注低频和**高频**的信息（高频信息人眼无法察觉）

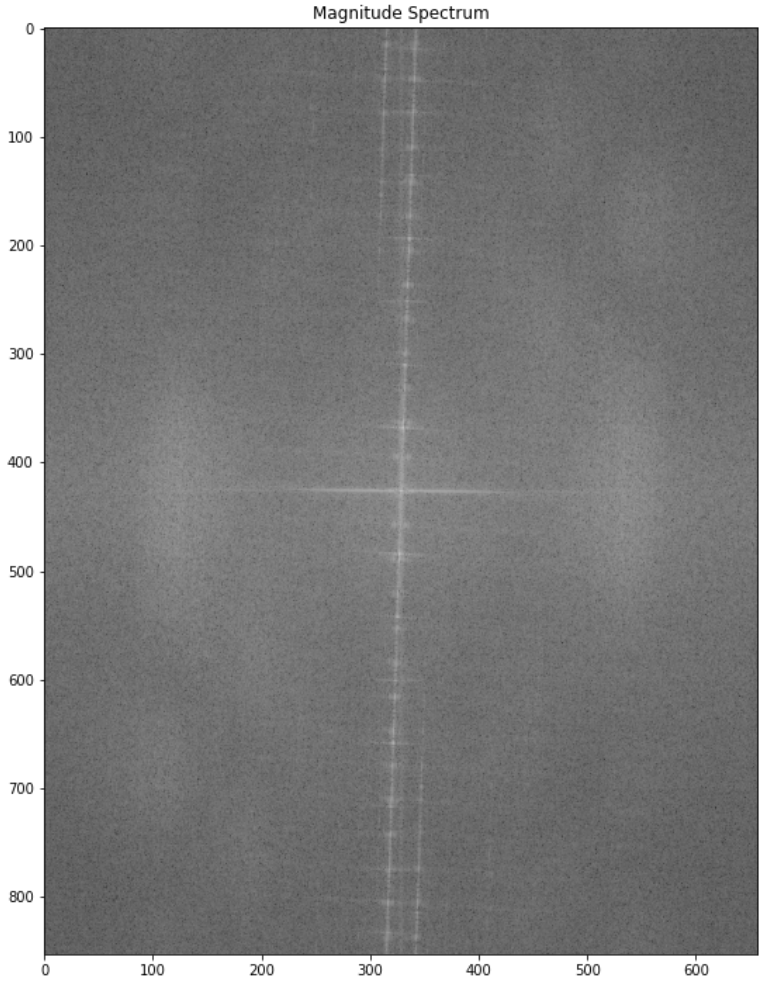
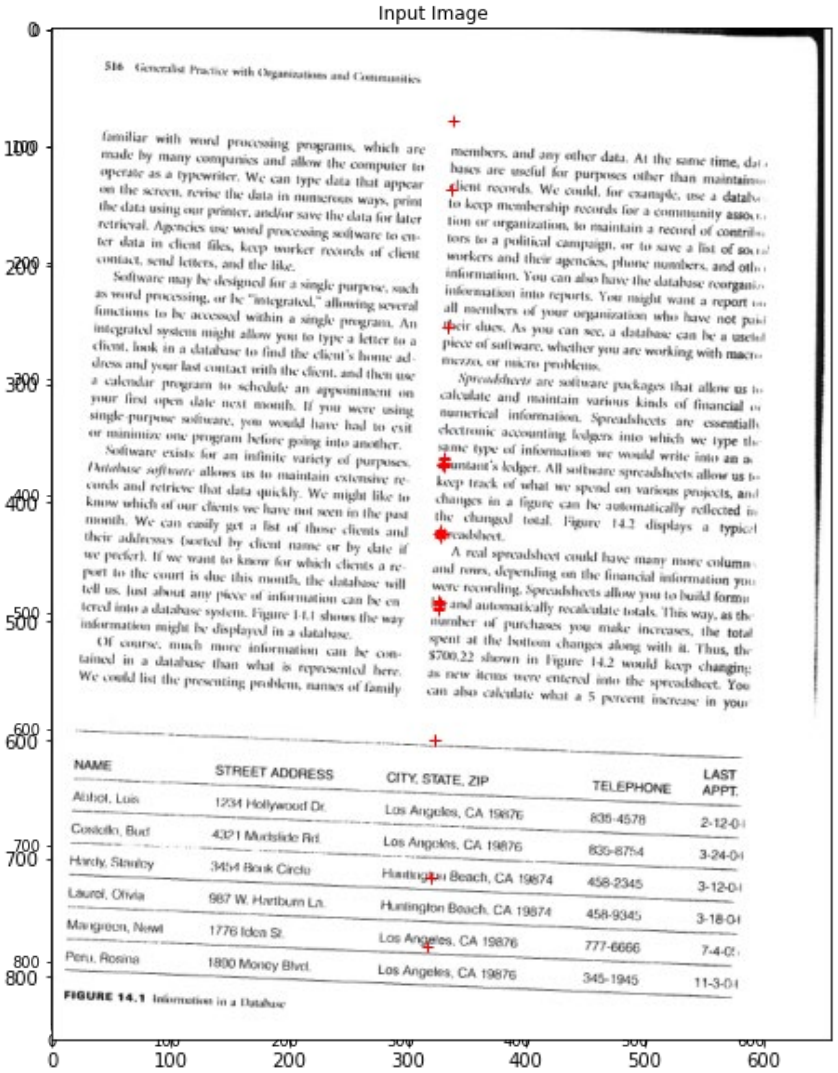
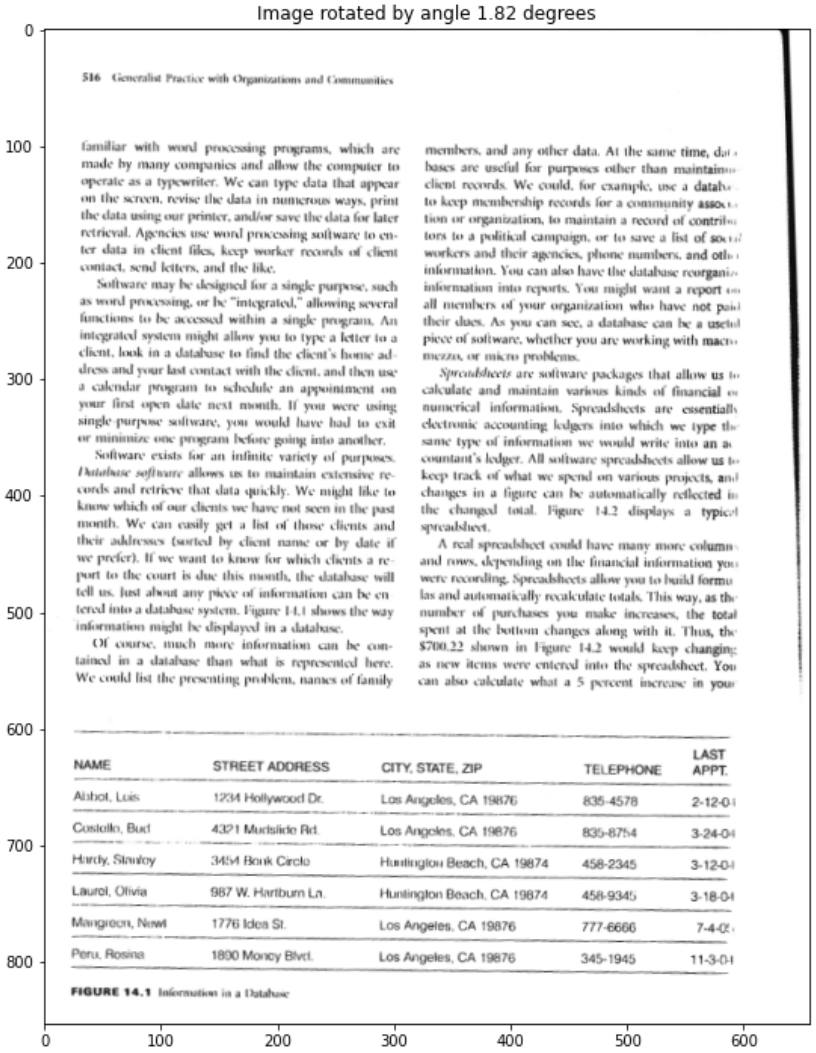
- 模型记忆：
  - 针对标记扰动的数据，模型能够记忆整个数据集
  - 正常学习流程：先学低频，再学高频特征
  - 标记扰动之后学习流程：低频高频同等对待，记忆数据集

- 产生对抗样本
  - 增强模型的泛化能力；对模型进行攻击

傅里叶变换纠偏

- 主要思路：
  - 图像中的“周期性”反应在频谱中有中心对称趋势；
  - 原图像旋转时，频谱会进行相应的旋转
- 利用频谱确定图像的旋转角度





傅里叶变换纠偏