NJUAI 南京大学 人工智能学院
SCHOOL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, NANJING UNIVERSITY
南京大學 NANJING UNIVERSITY 1902

08 离散信号的傅里叶变换

傅里叶分析方法的“离散化”

傅里叶级数和傅里叶变换

- 傅里叶级数（FS），针对连续周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, e^{jn\omega t}$$

其中

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle}$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 离散频谱

- 傅里叶变换（FT），针对一般连续信号

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 逆变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \, e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

- 连续频谱

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散信号（序列）的傅里叶变换

- 傅里叶变换（FT），针对一般连续信号

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$$

- 逆变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

- 连续频谱

- **离散时间**傅里叶变换（DTFT）：

$$\mathrm{DTFT}[x[n]] = X(e^{j\omega})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

- 逆变换

$$\mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = x[n]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, \mathrm{d}\omega$$

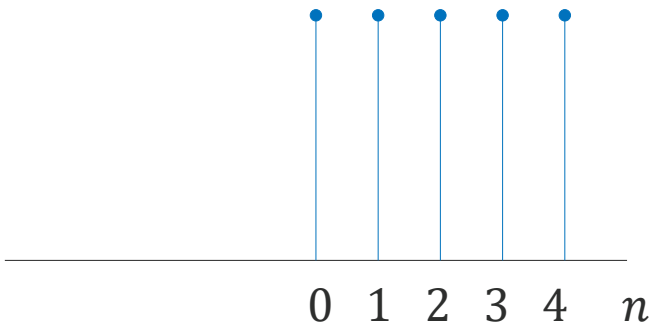
- $X(e^{j\omega})$是复数，是以2π为周期的**周期函数**
- 收敛充分条件：能量受限或绝对可和

DTFT的计算

计算$x[n]=u[n]-u[n-5]$的傅里叶变换（DTFT）

- 根据定义

$$\mathrm{DTFT}\big[x[n]\big]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{4}e^{-jn\omega}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$



$$=\frac{e^{-j\omega 2.5}}{e^{-j\omega 0.5}}\left(\frac{e^{j\omega 2.5}-e^{-j\omega 2.5}}{e^{j\omega 0.5}-e^{-j\omega 0.5}}\right)=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)}\right]$$

DTFT的性质

- 时移

$$\mathrm{DTFT}\{x[n-k_0]\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k_0} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

- 频移

$$\mathrm{DTFT}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n} x[n]\} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$$

- 能量定理

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

- 时域卷积

$$\mathrm{DTFT}\{x[n] * h[n]\} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

- 频域卷积

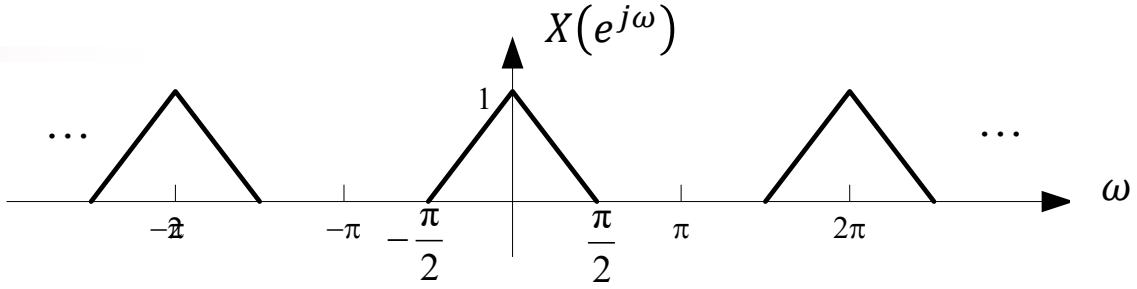
$$\mathrm{DTFT}\{x[n]h[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\, \mathrm{d}\theta$$

- 频域微分

$$\mathrm{DTFT}\{nx[n]\} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega}$$

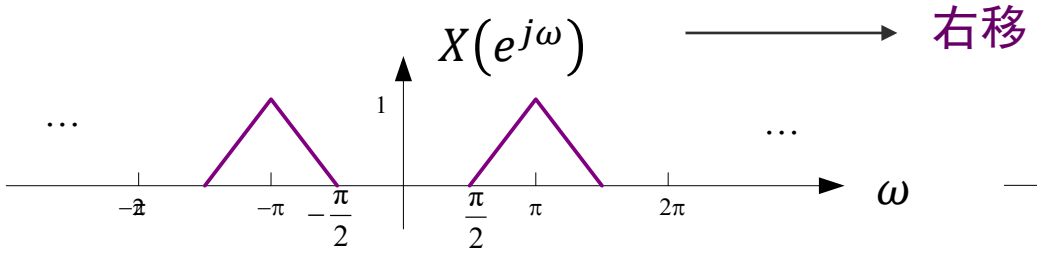
DTFT的性质

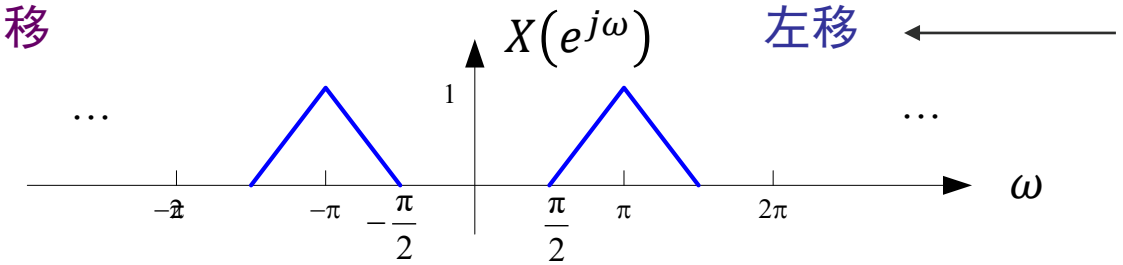
已知$x[n]$的频谱如图，试求DTFT$\{x[n]\cos(\pi n)\}$

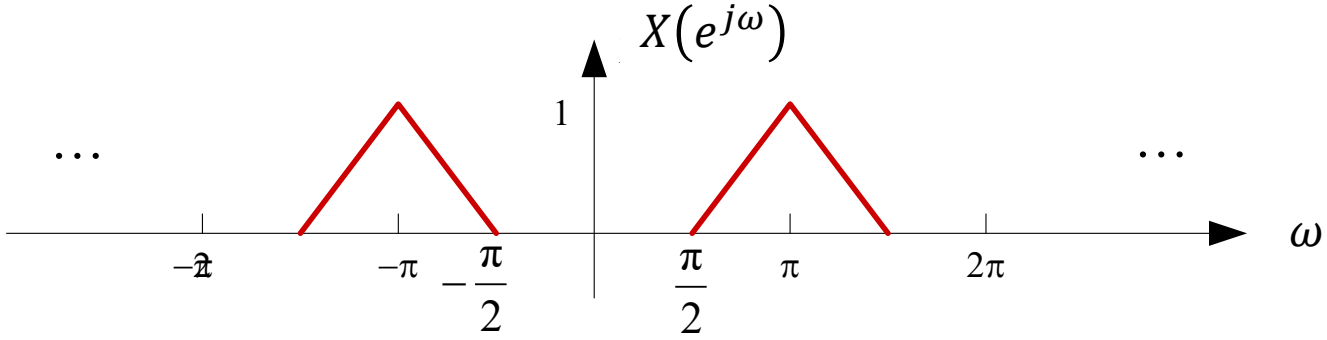


- 利用频移特性，可得

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\cos(\pi n)\} = [X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)}) + X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+\pi)})]/2$$







概要

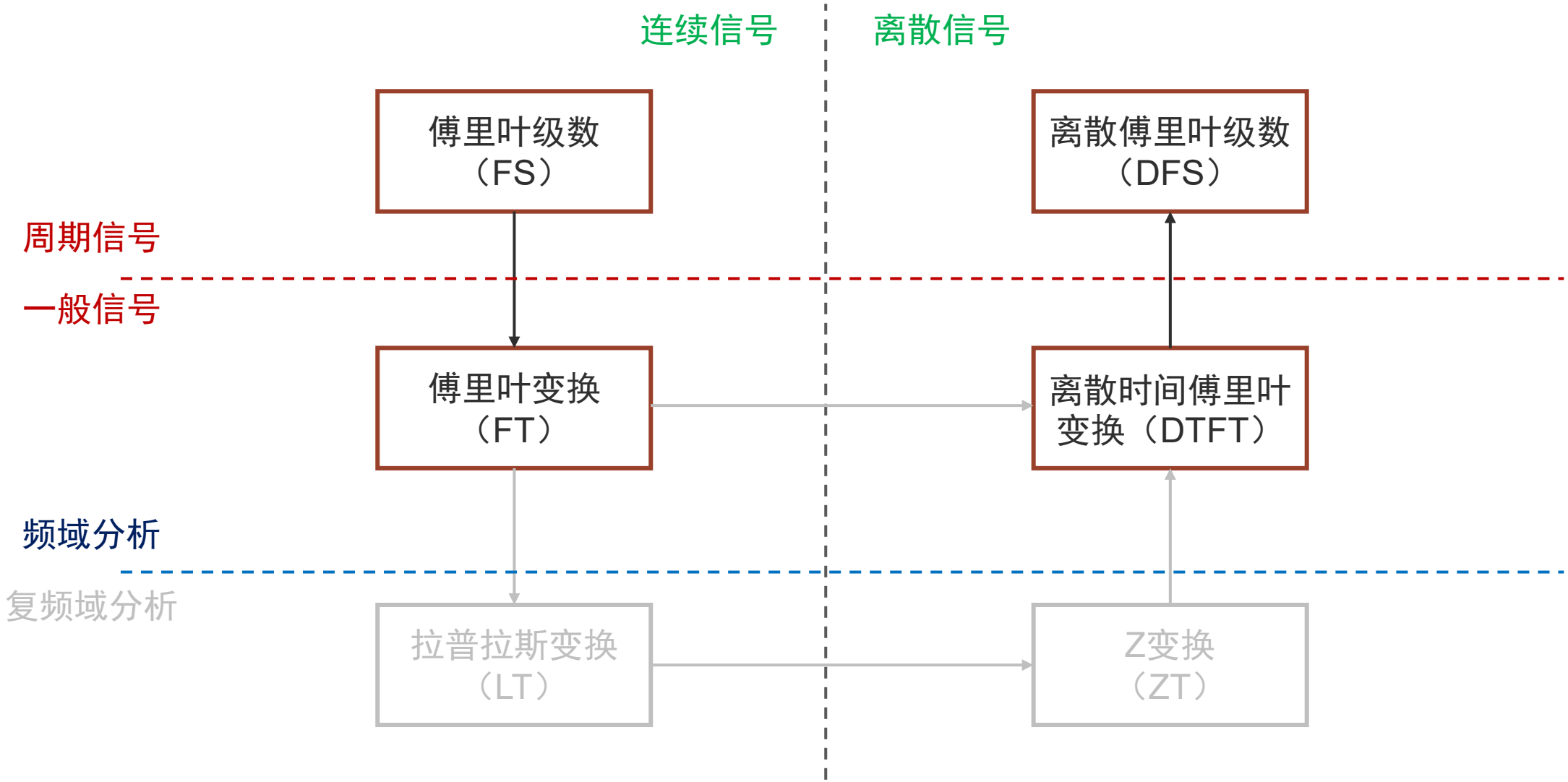
1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

几类变换之间的关系


连续信号
离散信号
傅里叶级数（FS）
离散傅里叶级数（DFS）
周期信号
一般信号
傅里叶变换（FT）
离散时间傅里叶变换（DTFT）
频域分析
复频域分析
拉普拉斯变换（LT）
Z变换（ZT）

离散傅里叶级数

- **连续**周期信号的傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{jk\omega t}$$

$$X_k = \frac{\langle x, e^{jk\omega t} \rangle}{\langle e^{jk\omega t}, e^{jk\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 离散正交基?

$$e^{jk\omega n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- 周期为N的序列$\tilde{x}[n]$可分解为基本序列$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$的和

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- 周期序列$\tilde{x}[n]$使用周期序列$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$的各次谐波表示

- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$是关于n的周期函数，周期为N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(n+mN)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi mk}$$

- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$是关于k的周期函数，周期为N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi ln}$$

离散傅里叶级数

- 周期为N的序列$\tilde{x}[n]$可分解为基本序列$e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$的和
  - 只用**一个周期**信息表示
  - DFS:

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}(\tilde{x}[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

DFS只有N个不同的数值

  - IDFS:

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{IDFS}(\tilde{X}[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

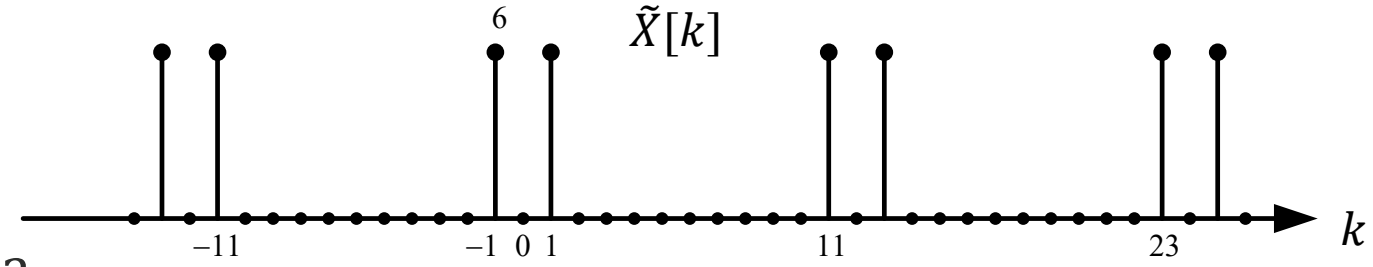
  - 整体记为

$$\tilde{x}[n] \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

常用离散周期序列的频谱

- 周期单位脉冲序列$\delta_N[n]$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}\{\delta_N[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] W_N^{kn} = 1$$



- 正弦序列
  - 周期序列$\tilde{x}[n] = \cos(\pi n/6)$的频谱, $N = 12$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{12}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n}{12}} = \frac{1}{12}\left(6W_{12}^{k} + 6W_{12}^{-k}\right)$$

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = \pm 1 \\ 0 & -5 \le k \le 6, k \ne \pm 1 \end{cases} \qquad \tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = 1,11 \\ 0 & 2 \le k \le 10, k = 0 \end{cases}$$

常用离散周期序列的频谱

求周期为4序列$\tilde{x}_4[n] = \{\cdots, 1,1,-1,1,\cdots\}$的频谱

- 根据定义

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}(\tilde{x}_N[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$$

- $\tilde{X}[0] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1] + \tilde{x}_4[2] + \tilde{x}_4[3] = 2$
- $\tilde{X}[1] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}} + \tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + \tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 3} = 2$
- $\tilde{X}[2] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + \tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 4} + \tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 6} = -2$
- $\tilde{X}[3] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 3} + \tilde{x}_4[2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 6} + \tilde{x}_4[3]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}\cdot 9} = 2$

概要

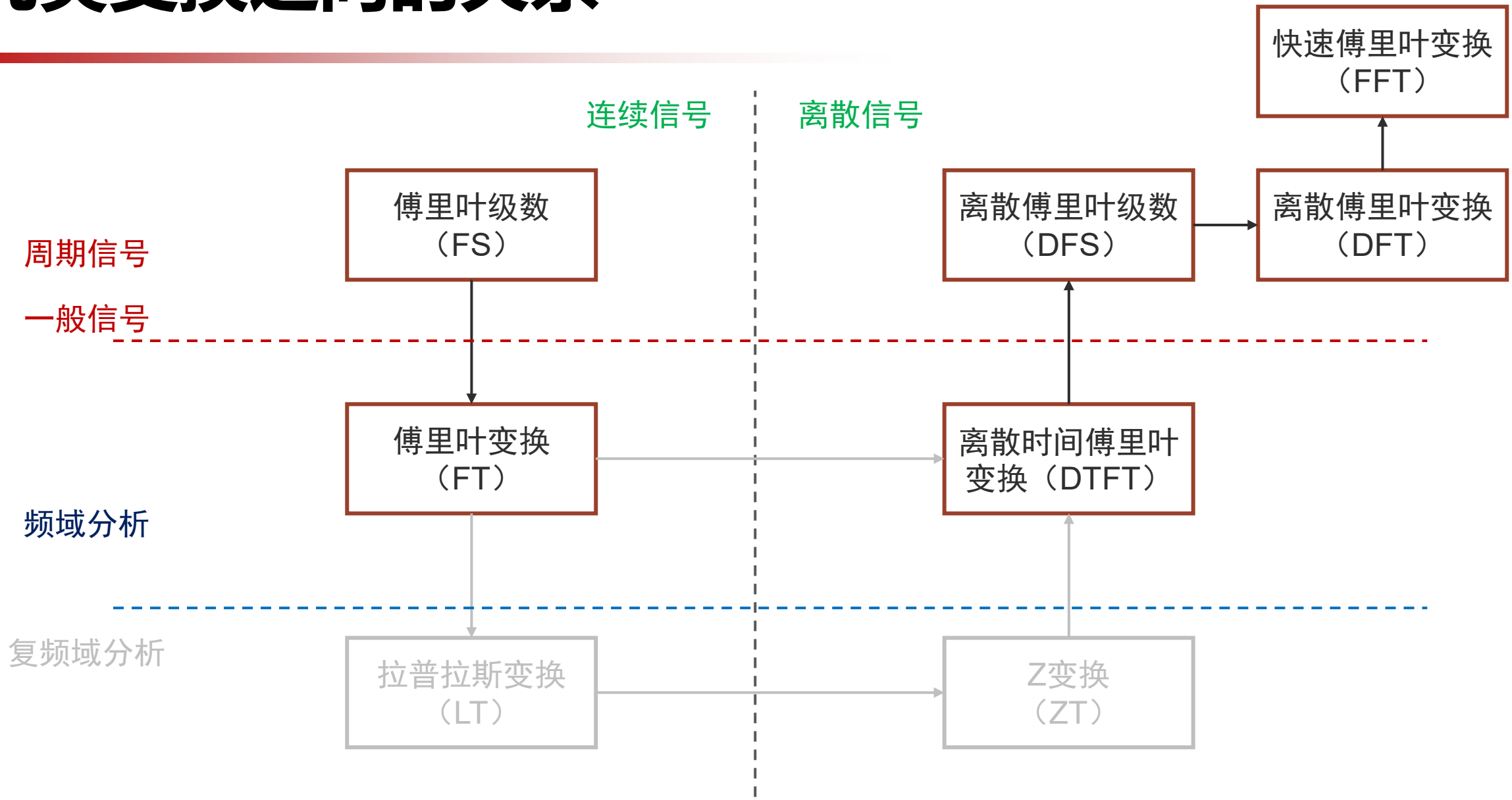
1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

几类变换之间的关系


连续信号
离散信号
快速傅里叶变换（FFT）
傅里叶级数（FS）
离散傅里叶级数（DFS）
离散傅里叶变换（DFT）
周期信号
一般信号
傅里叶变换（FT）
离散时间傅里叶变换（DTFT）
频域分析
复频域分析
拉普拉斯变换（LT）
Z变换（ZT）

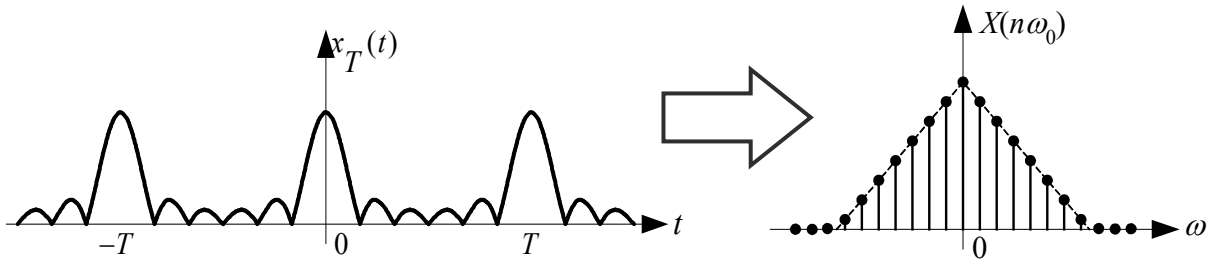
四类信号的傅里叶变换

连续信号

周期为 T 的**连续**时间**周期**信号（频谱**离散非周期**）

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$X_n = X(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{<T>} \tilde{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$



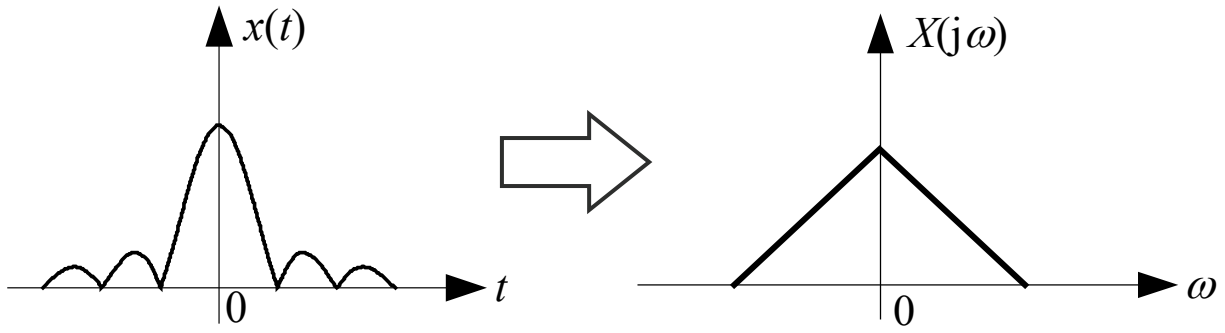
周期信号

非周期信号

连续时间**非周期**信号（频谱**连续非周期**）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$



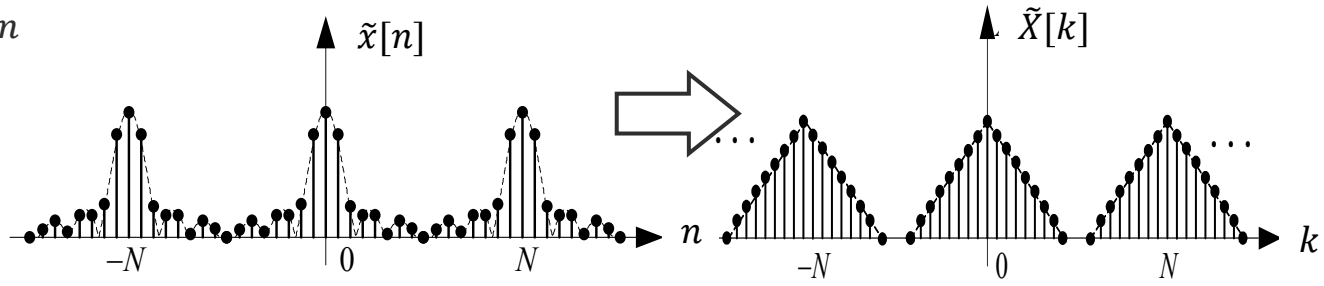
四类信号的傅里叶变换

离散信号

周期为N的**离散周期**信号（频谱**周期**为N的**离散**谱）

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{IDFS}\{\tilde{X}[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$



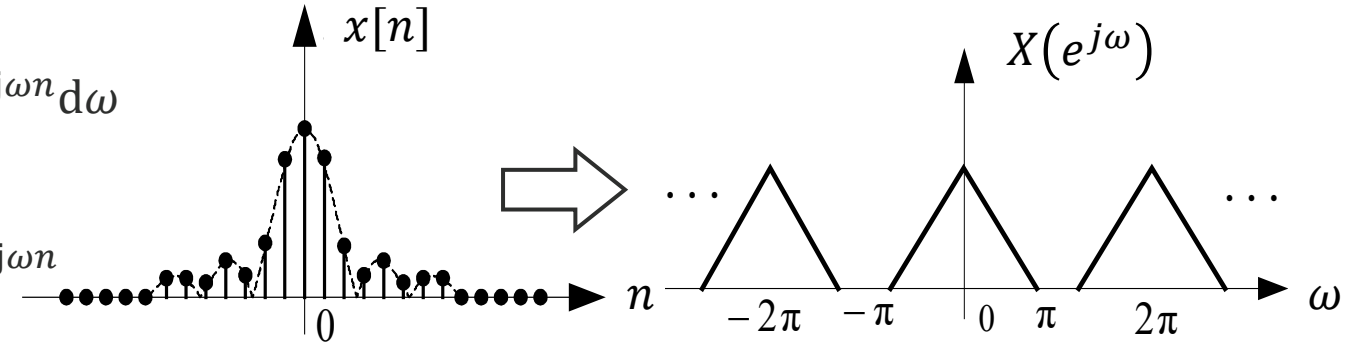
周期信号

非周期信号

离散非周期信号（频谱**周期**为2π的**连续**谱）

$$x[n] = \mathrm{IDTFT}\{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$



四类信号的傅里叶变换

连续信号

周期为 T 的**连续**时间**周期**信号（频谱**离散非周期**）

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

周期信号

$$X_n = X(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{<T>} \tilde{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

离散信号

周期为N的**离散周期**信号（频谱**周期**为N的**离散**谱）

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{IDFS}\{\tilde{X}[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \mathrm{DFS}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

非周期信号

连续时间**非周期**信号（频谱**连续非周期**）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

离散非周期信号（频谱**周期**为2π的**连续**谱）

$$x[n] = \mathrm{IDTFT}\{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

信号的数字处理

- 信号的计算机处理
  - 输入、输出为**离散**信号
  - 何种变换满足输入输出离散条件?

输入为离散信号$x[n]$

⇒ 基于DTFT，输出为**连续**频谱

输出为离散（周期）信号$X[k]$

⇒ 基于DFS，输入为离散**周期**信号

输入非周期序列，计算机计算时，当作由$x[n]$延拓的周期序列处理

离散傅里叶变换

- 基于**主值序列**定义长度为N（非周期）序列的离散傅里叶变换（DFT）
- DFT

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

- IDFT

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\,W_N^{-nk},n=0,1,\cdots,N-1$$

- 表示为

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\},\qquad x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}$$

离散傅里叶变换

$x[n]=\delta[n],\quad 0\le \mathrm{n}\le N-1$，求$N$点序列$x[n]$的DFT

- 根据DFT定义

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x\,[n]W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta\,[n]W_N^{nk}=1,\quad 0\le k\le N-1$$

$x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n),\quad 0\le n\le N-1$, 求$N$点DFT

- 根据

$$x[n]=\frac{1}{N}(\frac{N}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}+\frac{N}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(N-1)n})$$

可得$X[k]=\begin{cases}N/2 & k=1,N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

离散傅里叶变换

求有限长4点序列$x[n]=\{1,1,-1,1\}$的DFT

- 根据

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk}$$

有

$$X[0]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=2$$

$$X[1]=x[0]+x[1]W_4^1+x[2]W_4^2+x[3]W_4^3=2$$

$$X[2]=x[0]+x[1]W_4^2+x[2]W_4^4+x[3]W_4^6=-2$$

$$X[3]=x[0]+x[1]W_4^3+x[2]W_4^6+x[3]W_4^9=2$$

因此$X[k]=\{2,2,-2,2\},\quad k=0,1,2,3$

- 使用矩阵方式表示左侧计算过程

$$\begin{bmatrix}X[0]\\X[1]\\X[2]\\X[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0\\W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3\\W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6\\W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[0]\\x[1]\\x[2]\\x[3]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j}\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\2\end{bmatrix}$$

DFT的矩阵表示

求有限长4点序列$x[n]=\{1,1,-1,1\}$的DFT

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 因此$X[k]=\{2,2,-2,2\}$, $k=0,1,2,3$

- 设

$$\mathbf{X} = [X[0] \quad X[1] \quad \cdots \quad X[N-1]]^T,$$

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1]]^T,$$

- DFT矩阵形式为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D_N x}$$

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

DFT、DFS、DTFT的关系

- DFT可以看成是截取DFS的**主值序列**构成的变换对

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\tilde{x}[n]\cdot R_N[n]$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[k]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\tilde{X}[k]\cdot R_N[k]$$

- 其中

$$R_N[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, \qquad\qquad o.w.\end{cases}$$

- $x[n]$的DFT $X[k]$是其DTFT $X(e^{j\omega})$在一个周期$[0,2\pi)$的**等间隔抽样**

$$X(e^{j\omega})=\mathrm{DTFT}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot e^{-jn\omega}$$

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}=\sum_{k=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X[k]=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

DFT的周期性

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

- （隐藏的）周期性
  - $X[k]$的周期为N

$$X[k+N] = X[k]$$

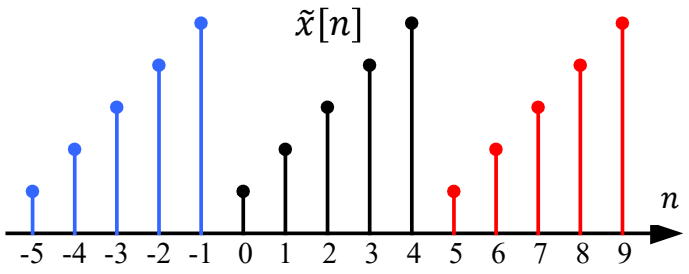
  - $x[n]$的周期为N

$$x[n+N] = x[n]$$

离散傅里叶变换的性质

- 线性：需将较短序列**补零**后，再按长序列的点数做DFT

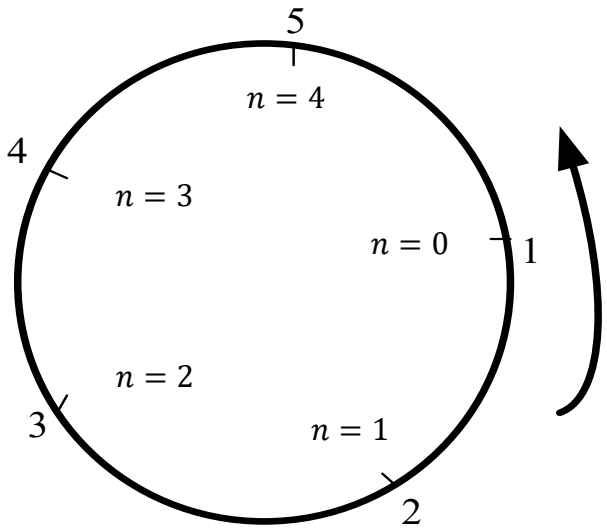
$$\mathrm{DFT}\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=a\mathrm{DFT}\{x_1[n]\}+b\mathrm{DFT}\{x_2[n]\}$$

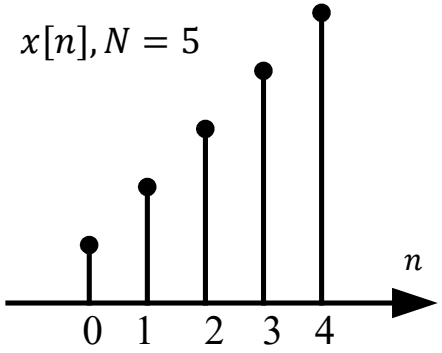


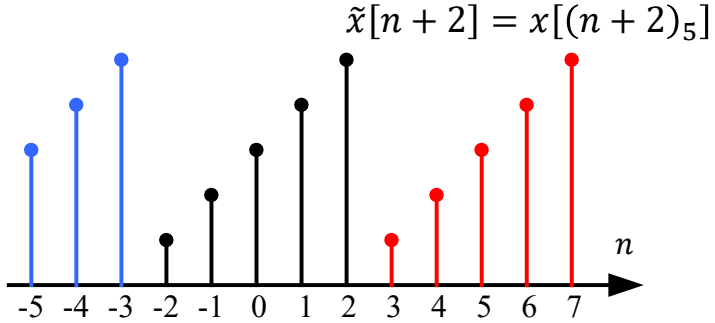
- DFT**循环位移**特性

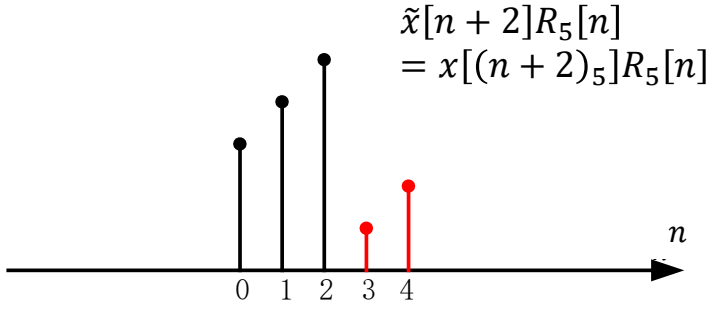
$$y[n]=x[(n\pm m)_N]R_N[n]$$

  - 序列周期延拓
  - 周期序列移位
  - 抽取主值序列









离散傅里叶变换的性质

- DFT循环位移特性
  - **时域**的循环位移对应频域的相移

$$\mathrm{DFT}\{x[(n+m)_N]\} = W_N^{-mk} X[k]$$

$$\mathrm{DFT}\{x[(n-m)_N]\} = X[k] W_N^{mk}$$

  - 时域的相移对应**频域**的循环位移

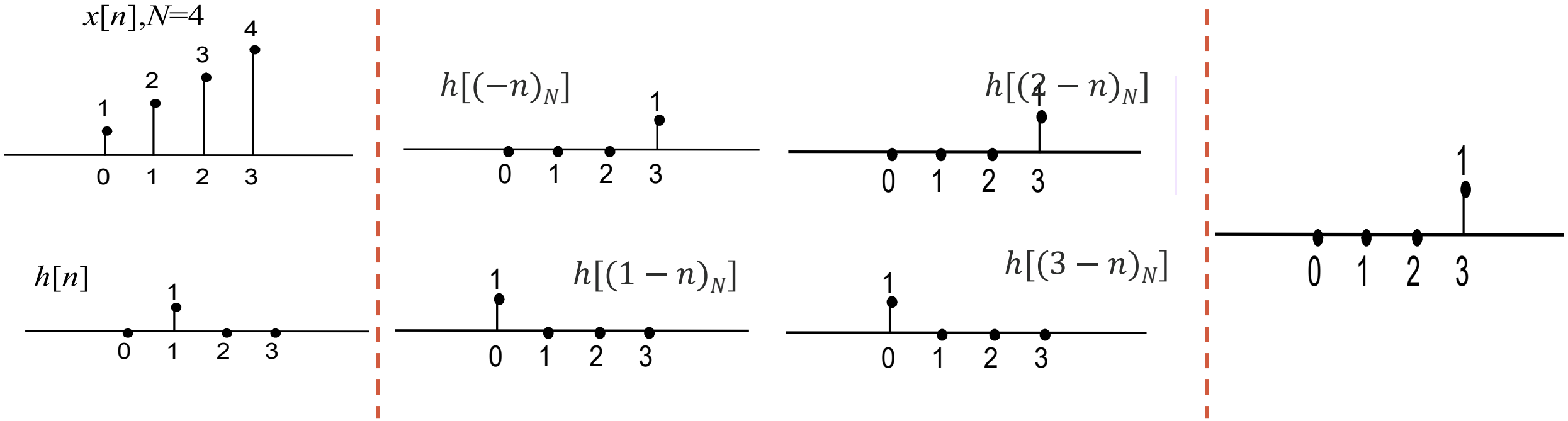
$$\mathrm{DFT}\left\{W_N^{ln} x[n]\right\} = X[(k+l)_N]$$

$$\mathrm{DFT}\left\{W_N^{-ln} x[n]\right\} = X[(k-l)_N]$$

离散傅里叶变换的性质

- 序列的**循环**卷积

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[(k)_N] x_2[(n-k)_N] R_N[n]$$



离散傅里叶变换的性质

- 若$x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k], x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_2[k]$
- 时域卷积定理
  - 时域的**循环卷积**对应频域的乘积

$$\mathrm{DFT}\{x_1[n] \circledast x_2[n]\} = X_1[k] \cdot X_2\,[k]$$

- 频域卷积定理
  - 时域的乘积对应频域的**循环卷积**

$$\mathrm{DFT}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \circledast X_2[k]$$

卷积和循环卷积

$x_1[n]=\{1,1,1\},\ x_2[n]=\{1,1,0,1\}$，计算

- (1) $x_1[n]$和$x_2[n]$的线性卷积；

$$x_1[n]*x_2[n]=[1,2,2,2,1,1]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$x_1[n]=\{1,1,1\},\ x_2[n]=\{1,1,0,1\}$，计算

- (2) $x_1[n]$和$x_2[n]$的4点**循环卷**积$y[n]$；

$$\begin{bmatrix}y[0]\\y[1]\\y[2]\\y[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1[0]&x_1[3]&x_1[2]&x_1[1]\\x_1[1]&x_1[0]&x_1[3]&x_1[2]\\x_1[2]&x_1[1]&x_1[0]&x_1[3]\\x_1[3]&x_1[2]&x_1[1]&x_1[0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2[0]\\x_2[1]\\x_2[2]\\x_2[3]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\2\\2\end{bmatrix}$$

卷积和循环卷积

$x_1[n] = \{1,1,1\}$, $x_2[n] = \{1,1,0,1\}$, 计算

- (3) $x_1[n]$和$x_2[n]$的5点、6点和7点循环卷积
- $x_1[n]$和$x_2[n]$的5点循环卷积$y_5[n]$为

$$y_5[n] = \{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1\}$$

- $x_1[n]$和$x_2[n]$的6点循环卷积$y_6[n]$为

$$y_6[n] = \{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1\}$$

和线性卷积结果一致

- $x_1[n]$和$x_2[n]$的7点循环卷积$y_7[n]$为

$$y_7[n] = \{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0\}$$

卷积的矩阵表示

- **4点循环卷积**的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **6点循环卷积**的矩阵表示

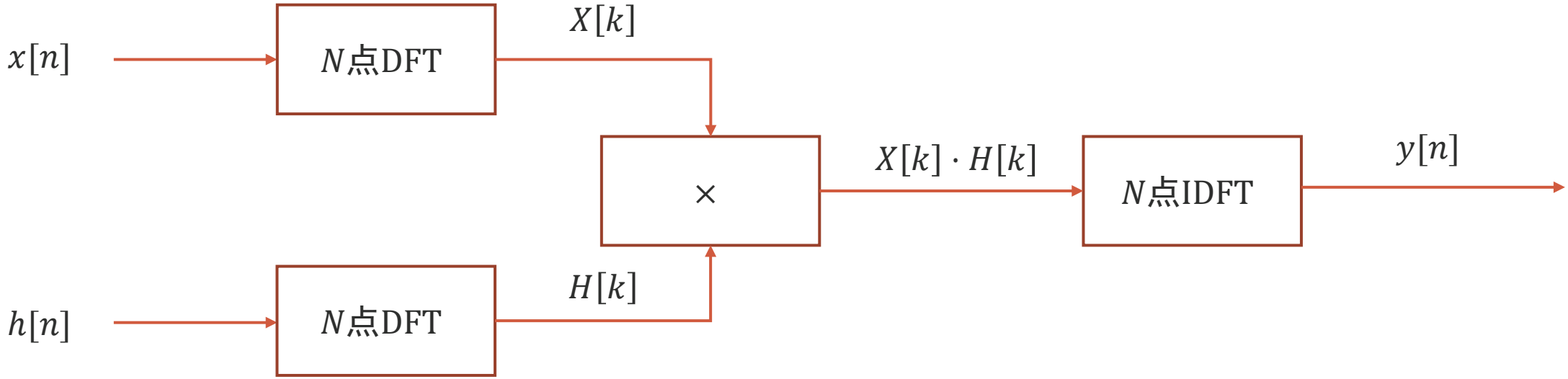
$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ x_2[4] \\ x_2[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基于DFT的卷积计算

- 利用DFT计算长为M, L序列的卷积（输出长度为$M+L-1$）

$$y[n] = \mathrm{IDFT}\big[X[k] \cdot H[k]\big] = x[n] * h[n]$$

  - 对$x[n], h[n]$补零到长度为N，做N点DFT
  - 在频域做乘积得到$Y[k]$
  - 对$Y[k]$做IDFT



DFT的计算

- 利用MATLAB由DFT计算$x[n] * h[n]$. $x[n] = [1, 2, 0, 1]$, $h[k] = [2, 2, 1, 1]$
- % Calculate Linear Convolution by DFT
- x = [1 2 0 1];
- h = [2 2 1 1];
- % determine the length for zero padding
- L = length(x) + length(h) - 1;
- % Compute the DFTs by zero-padding
- XE = fft(x, L);
- HE = fft(h, L);
- % Determine the IDFT of the product
- y1 = ifft(XE .* HE);

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散傅里叶变换

- 基于主值序列定义长度为N（非周期）序列离的散傅里叶变换（**DFT**）
- DFT

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

- IDFT

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\,W_N^{-nk},n=0,1,\cdots,N-1$$

- 表示为

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\},\qquad x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}$$

DFT和IDFT有**相同的**时间复杂度，且只包含加法和乘法

离散傅里叶变换的复杂度

- $N=4$点序列[2，3，3，2] DFT的计算复杂度

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$X[0]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^0+x[2]W_N^0+x[3]W_N^0=10$$

$$X[1]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^1+x[2]W_N^2+x[3]W_N^3=-1-\mathrm{j}$$

$$X[2]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^2+x[2]W_N^4+x[3]W_N^6=0$$

$$X[3]=x[0]W_N^0+x[1]W_N^3+x[2]W_N^6+x[3]W_N^9=-1+\mathrm{j}$$

- 复数加法$N(N-1)$; 复数乘法N^2

降低DFT计算量的思路

- 将长序列DFT分解为短序列的DFT
- 利用旋转因子W_N^{nk}的周期性、对称性、可约性
- 周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k}$$

- 对称性

$$\left(W_N^{nk}\right)^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k}$$

- 可约性

$$W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk} = W_{N/m}^{nk/m}, \quad N/m\text{为整数}$$

- 特殊值

$$W_N^0 = 1; \quad W_N^{\frac{N}{2}} = -1; \quad W_N^{\frac{N}{4}} = -j; \quad W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

离散傅里叶变换的复杂度

- $N=4$点序列[2，3，3，2] DFT的计算复杂度

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$X[0]=x[0]\cdot 1+x[1]\cdot 1+x[2]\cdot 1+x[3]\cdot 1=10$$

$$X[1]=x[0]\cdot 1+x[1]\cdot W_4^1+x[2]\cdot -1+x[3]\cdot -W_4^1=-1-\mathrm{j}$$

$$X[2]=x[0]\cdot 1+x[1]\cdot -1+x[2]\cdot 1+x[3]\cdot -1=0$$

$$X[3]=x[0]\cdot 1+x[1]\cdot -W_4^1+x[2]\cdot -1+x[3]\cdot -W_4^1=-1+\mathrm{j}$$

降低DFT计算量的思路

- 将时域序列逐次分解为一组**子序列**，利用旋转因子的特性，由**子序列**的DFT来实现整个序列的DFT
- 基2时间抽取(Decimation in time)FFT算法

$$x[n] \rightarrow \begin{cases} x[2r] \\ x[2r+1] \end{cases} \quad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- 基2频率抽取(Decimation in frequency)FFT算法

$$X[k] \rightarrow \begin{cases} X[2m] \\ X[2m+1] \end{cases} \quad m = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

基2时间抽取FFT算法推导

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{km}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rm} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)m} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rm} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rm}$$

记 $X_1[m] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rm}$ $\quad X_2[m] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rm}$

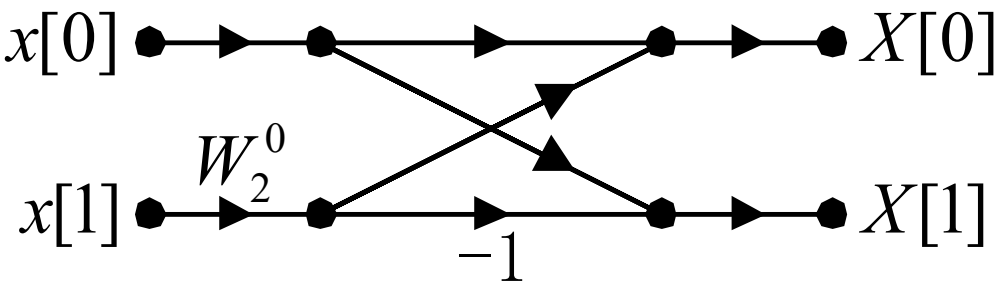
- 因此
- $X[m] = X_1[m] + W_N^m X_2[m]$
- $X[m+N/2] = X_1[m] - W_N^m X_2[m]$，$m = 0,1 \cdots \frac{N}{2} - 1$

2点基2时间抽取FFT算法流图

- $N = 2, \quad x[n] = [x[0], x[1]]$
- 则

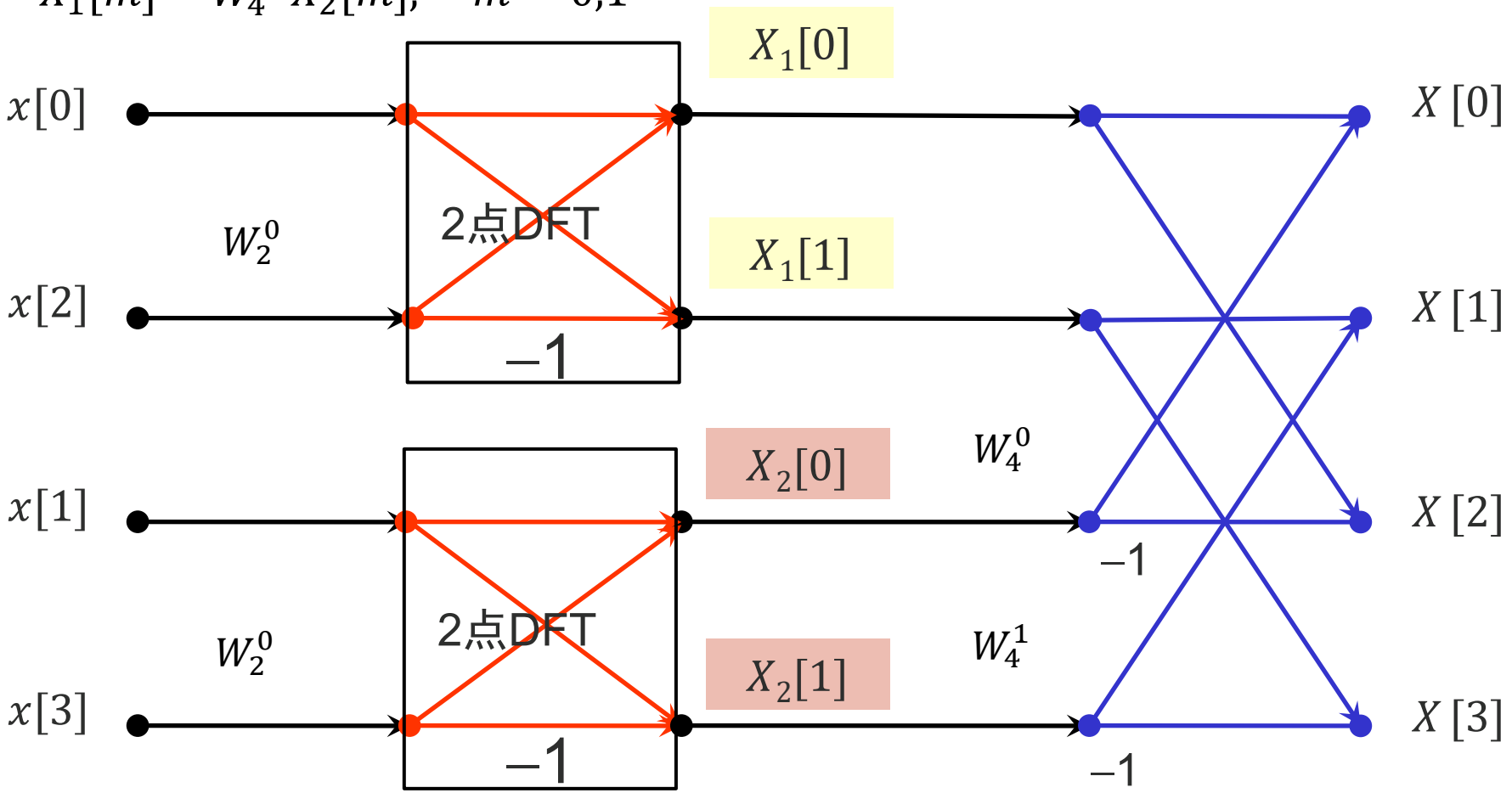
$$X[0] = x[0] + W_2^0 x[1]$$

$$X[1] = x[0] + W_2^1 x[1] = x[0] - W_2^0 x[1]$$



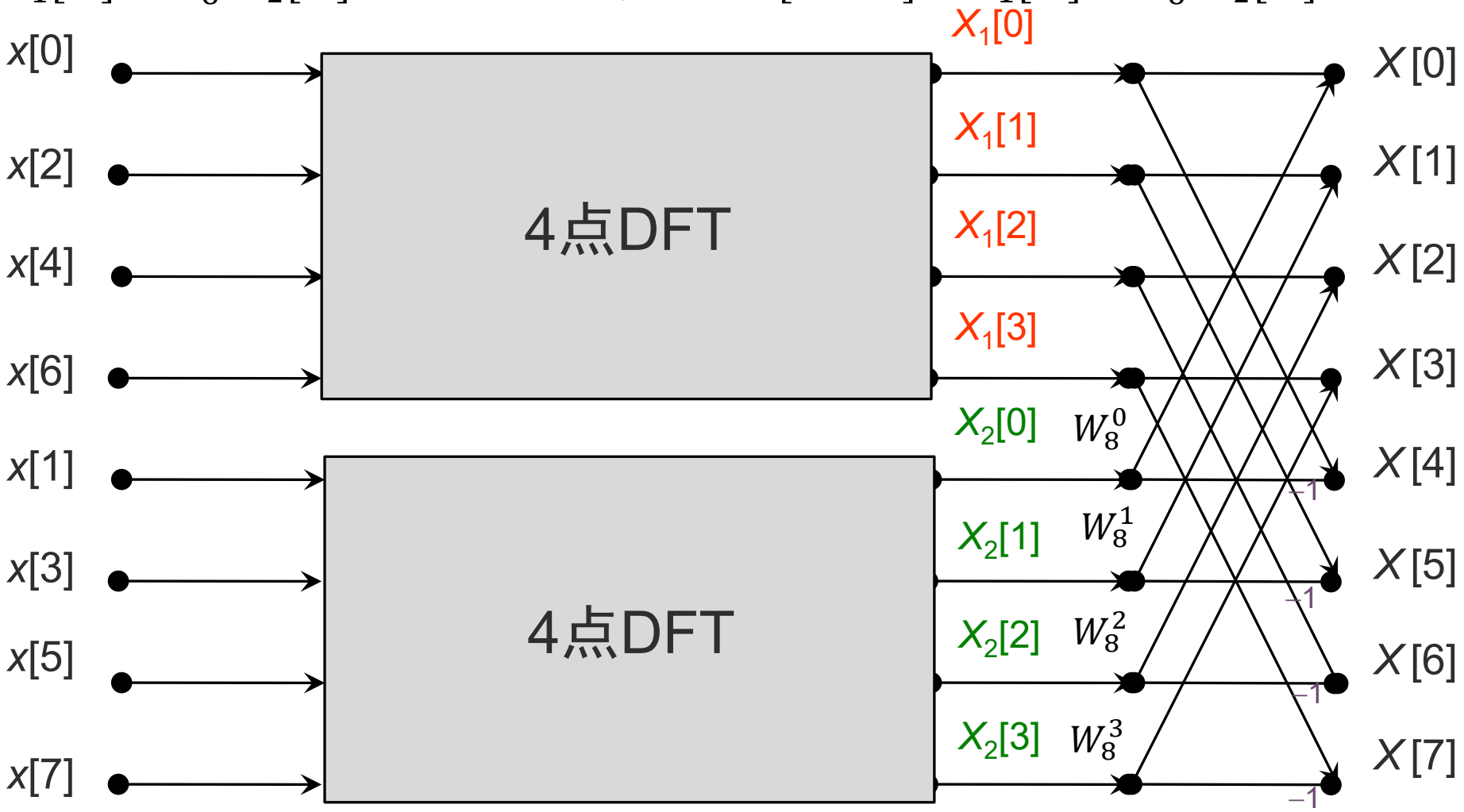
4点基2时间抽取FFT算法流图

- $X[m] = X_1[m] + W_4^m X_2[m], \quad m = 0,1$
- $X[m+2] = X_1[m] - W_4^m X_2[m], \quad m = 0,1$

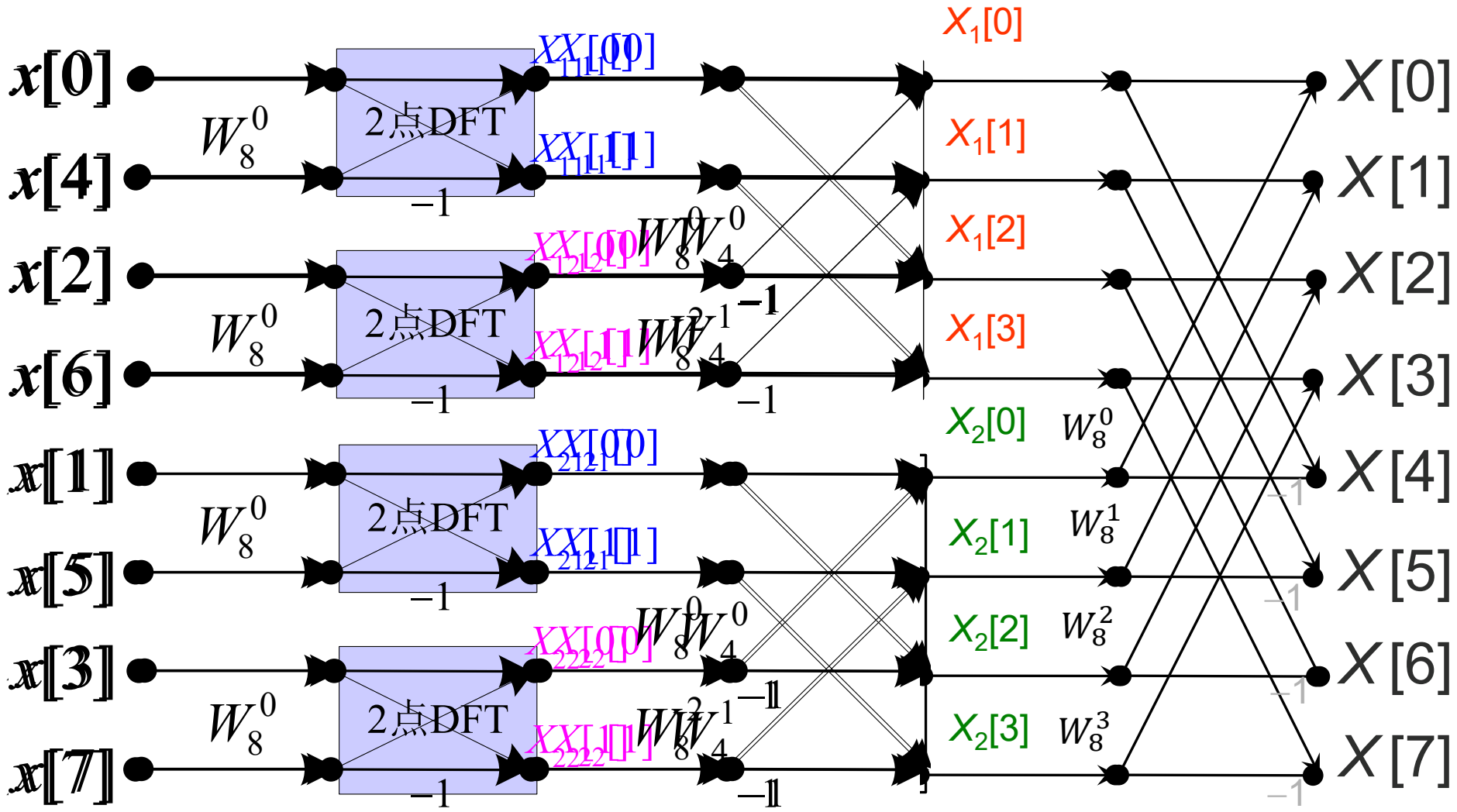


8点基2时间抽取FFT算法流图

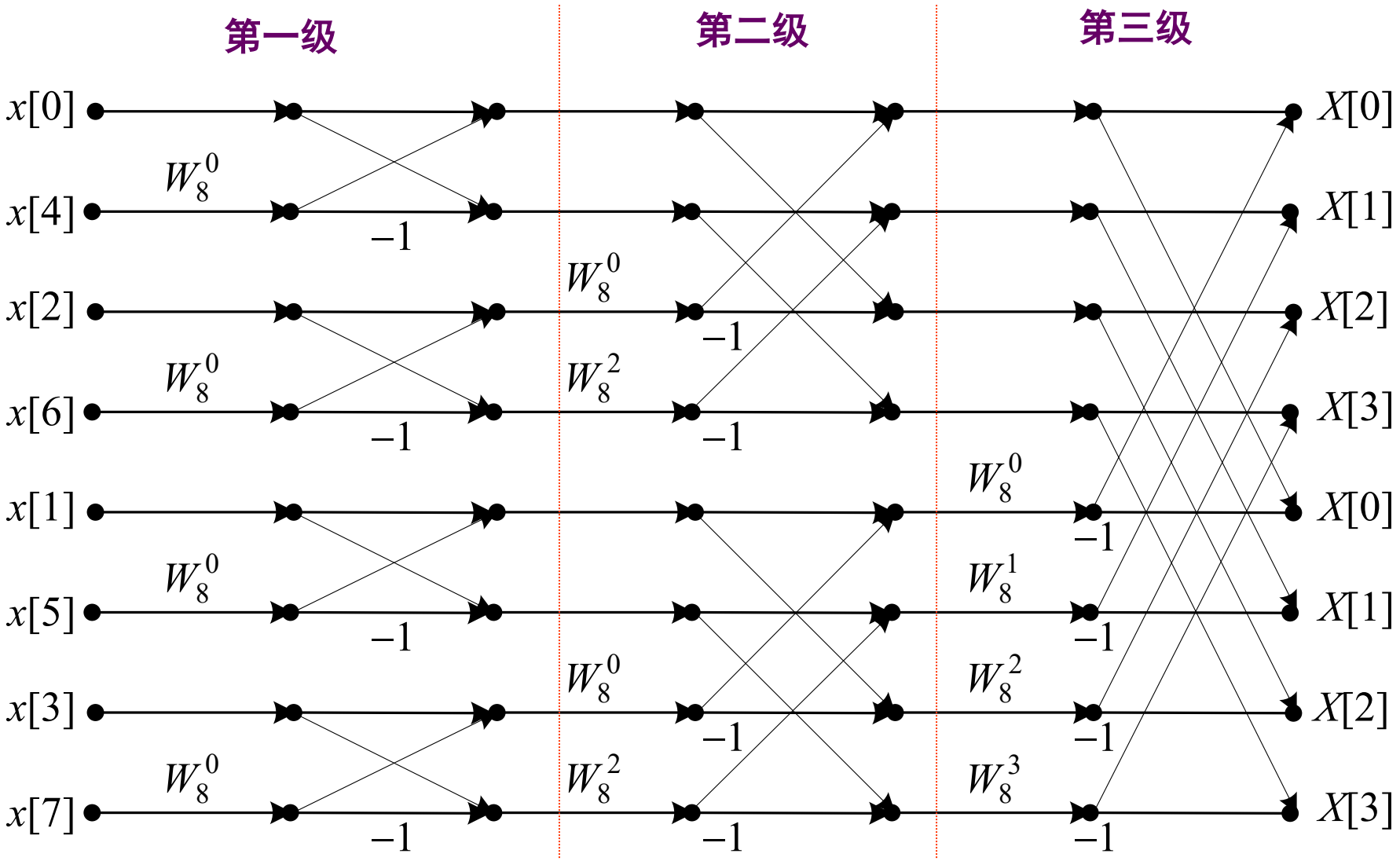
- $X[m] = X_1[m] + W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3; \qquad X[m+4] = X_1[m] - W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3$



8点基2时间抽取FFT算法流图



8点基2时间抽取FFT算法流图

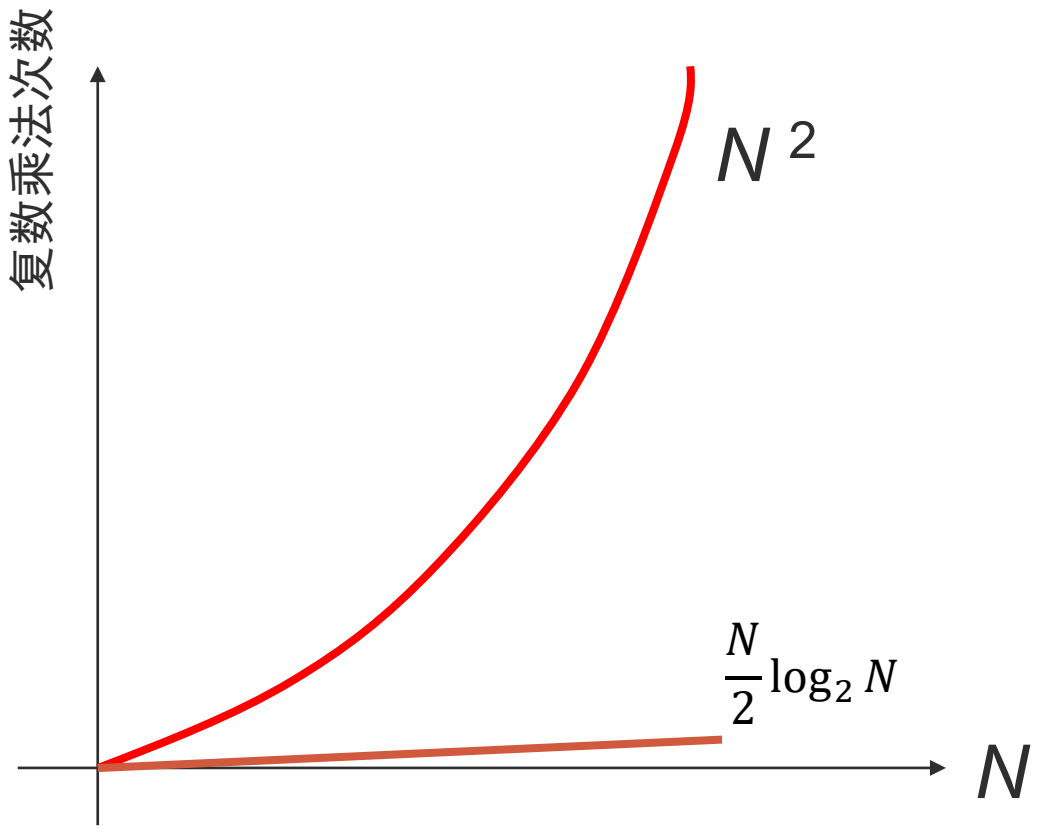


FFT算法流图旋转因子W_N^P规律

- 第一级的蝶形系数均为W_N^0，蝶形节点的距离为1
- 第二级的蝶形系数为W_N^0，$W_N^{N/4}$，蝶形节点的距离为2
- 第三级的蝶形系数为W_N^0，$W_N^{N/8}$，$W_N^{2N/8}$，$W_N^{3N/8}$，蝶形节点的距离为4
- 第M级的蝶形系数为W_N^0，W_N^1，$\cdots$，$W_N^{(N/2-1)}$，蝶形节点的距离为$N/2$

算法的计算复杂度

- FFT 复数乘法次数$\frac{N}{2}\log_2 N$



FFT计算

- 利用$N = 4$基2时间抽取的FFT流图计算8点序列$x[n] = [1, -1, 1, -1, 2, 1, 1, 2]$的DFT。
- 根据基2时间抽取FFT算法原理，8点序列的DFT $X[k]$可由两个4点序列的DFT $X_1[k]$和$X_2[k]$表达。

  如果按照序列$x[n]$序号的奇偶分解为$x_1[n]$和 $x_2[n]$，则存在

$$\begin{aligned} X[k] &= X_1[k] + W_8^k \cdot X_2[k] \\ X[k+4] &= X_1[k] - W_8^k \cdot X_2[k] \end{aligned} \qquad k = 0,1,2,3$$

其中$x_1[n] = [1, 1, 2, 1]$，$x_2[n] = [-1, -1, 1, 2]$，$X_1[k]$和$X_2[k]$可通过4点的FFT来计算。

利用FFT实现IFFT

$$X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn} \right)^*$$

- (1) 将$X[m]$取共轭
- (2) 用FFT流图计算$\mathrm{DFT}\{X^*[m]\}$
- (3) 对步骤(2)中结果取共轭并除以N

快速傅里叶变换 FFT

Carl Friedrich Gauss

Joseph Fourier

Cornelius Lanczos

James Cooley

John Tukey

德国数学家高斯于1805年通过观测数据对小行星轨道进行插值时提出过类似后续FFT的思想，但未分析计算时间，且使用其他数学工具

法国数学家、物理学家，1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的 固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响 。

1942年G. C. Danielson和C. Lanczos提出针对X射线晶体学的快速DFT算法，使用周期性将DFT复杂度降低到$O(N\log N)$

1965年Colley和Tukey的论文《An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series》提出N不是2的幂时的快速傅里叶变换算法，当前最著名的FFT算法，极大促进了DSP领域的发展

分治算法的基本思路

- 复数乘法需要**4次**实数乘法操作

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (bc+ad)i$$

- 降低乘法次数，只需要**3次**乘法

$$bc + ad = (a+b)(c+d) - ac$$

- 假设x, y为n –bit整数（n为2的幂），则考虑

$$x = \boxed{x_L}\,\boxed{x_R} = 2^{n/2}x_L + x_R$$

$$y = \boxed{y_L}\,\boxed{y_R} = 2^{n/2}y_L + y_R.$$

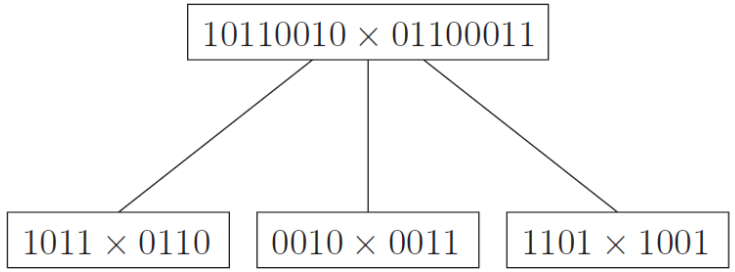
$$xy = \left(2^{n/2}x_L + x_R\right)\left(2^{n/2}y_L + y_R\right) = 2^n x_L y_L + 2^{n/2}(x_L y_R + x_R y_L) + x_R y_R$$

- 利用分治（Divide-and-conquer）方法，复杂度从$O(n^2)$降至$O(n^{1.59})$

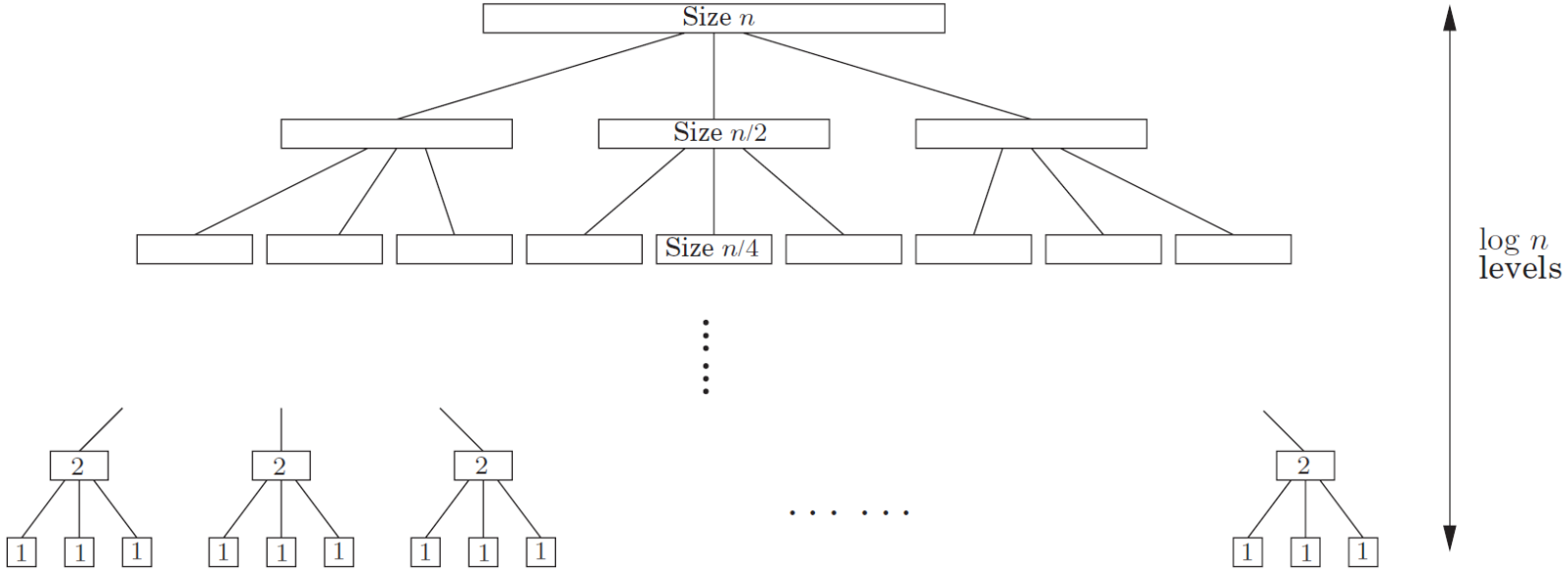
$$T(n) = 4T(n/2) + O(n)$$

分治算法的基本思路

(a)



(b)



多项式计算

- 两个d次多项式乘积为$2d$次多项式

$$\left(1+2x+3x^2\right)\cdot\left(2+x+4x^2\right)=2+5x+12x^2+11x^3+12x^4$$

- 定义

$$A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_dx^d$$
$$B(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_dx^d$$

- 相乘，得

$$C(x)=A(x)\cdot B(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{2d}x^{2d}$$

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

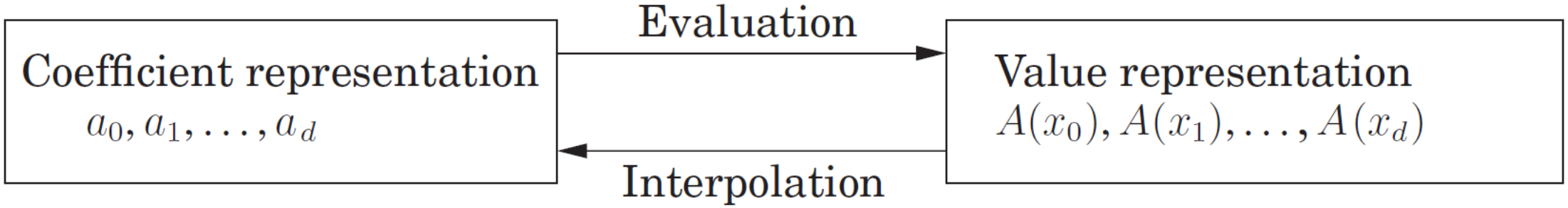
若$i>d$，令$a_i=b_i=0$

计算c_k需要$O(k)$步，因此求解所有$2d+1$个系数需要$O\left(n^2\right)$复杂度

多项式计算

- 两个d次多项式$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$如何确定?
  - 多项式系数：$a_0, a_1, \ldots, a_d$
  - 多项式取值：$A(x_0), A(x_1), \ldots, A(x_d)$
- $C(x) = A(x) \cdot B(x)$为$2d$次多项式，通过$2d+1$个点确定
  - 已知$A(x_0), A(x_1), \ldots, A(x_{2d+1})$， $B(x_0), B(x_1), \ldots, B(x_{2d+1})$
  - 可得$C(x_0), C(x_1), \ldots, C(x_{2d+1})$
  - 在**线性**时间确定多项式的取值

计算$d \le n$次多项式在某一点的取值需要$O(n)$步，因此估计n点取值复杂度为$O(n^2)$



多项式乘法的分治计算

- 如何选择n个点计算次数$\leq n-1$的多项式$A(x)$取值?

$$\pm x_0, \pm x_1, \dots, \pm x_{n/2-1}$$

由于$A(x_i)$和$A(-x_i)$部分取值有重合，可以简化计算

$$3+4x+6x^2+2x^3+x^4+10x^5=\left(3+6x^2+x^4\right)+x\left(4+2x^2+10x^4\right)$$

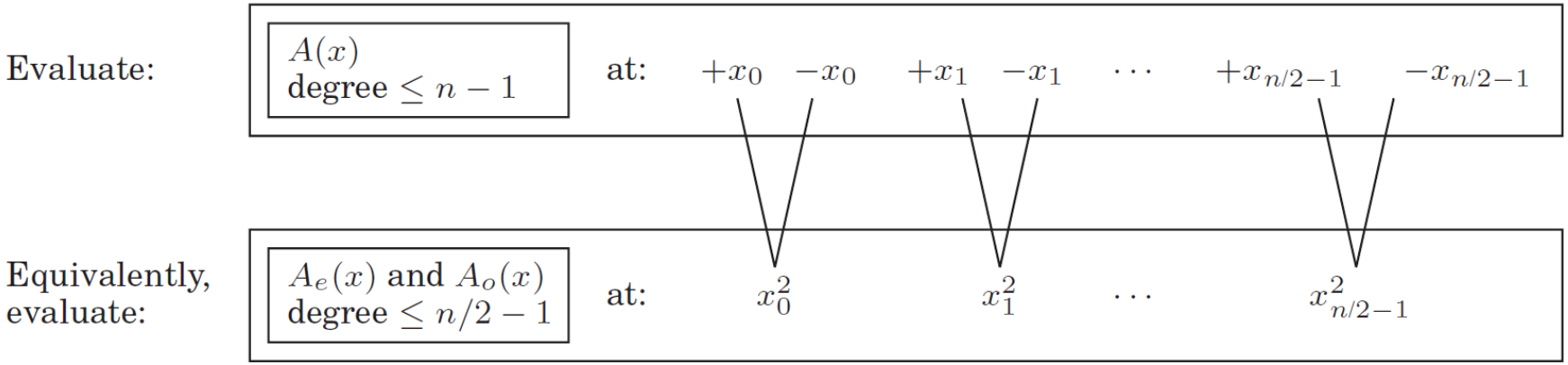
$$A(x)=A_e\left(x^2\right)+xA_o\left(x^2\right)$$

- 因此有

$$A(x_i)=A_e\left(x_i^2\right)+x_iA_o\left(x_i^2\right)$$

$$A(-x_i)=A_e\left(x_i^2\right)-x_iA_o\left(x_i^2\right)$$

- 在$\pm x_0, \pm x_1, \dots, \pm x_{n/2-1}$处计算$A(x)$转化为在$n/2$个点$x_0^2, \dots, x_{n/2-1}^2$处计算$A_e(x)$和$A_o(x)$

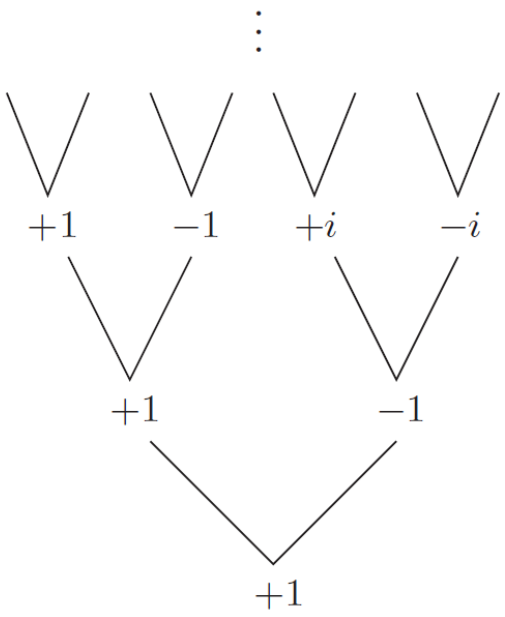


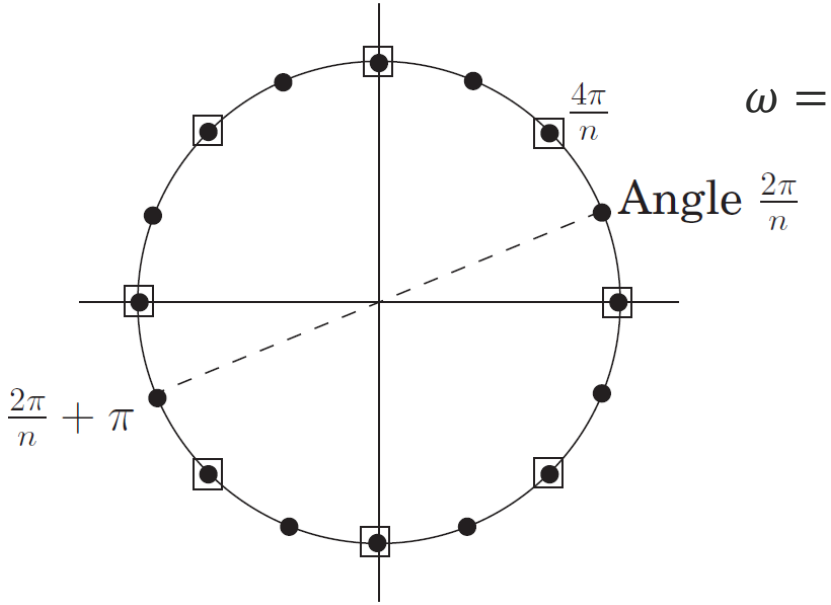
$$T(n)=2T(n/2)+O(n)$$

$$\Rightarrow O(n\log n)$$

FFT和多项式乘法

- 对于第二层，计算多项式在$x_0^2, \dots, x_{n/2-1}^2$处取值，其本身需要作为**正负样本对**才能继续递归
- 使用$z^n = 1$的n个根，$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$；$\omega = e^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$. 若$n$是偶数，则
  - n个根本身构成正负对，$\omega^{n/2+j} = -\omega^j$
  - 对n个根平方得到$z^{\frac{n}{2}} = 1$的解





$\omega = e^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$

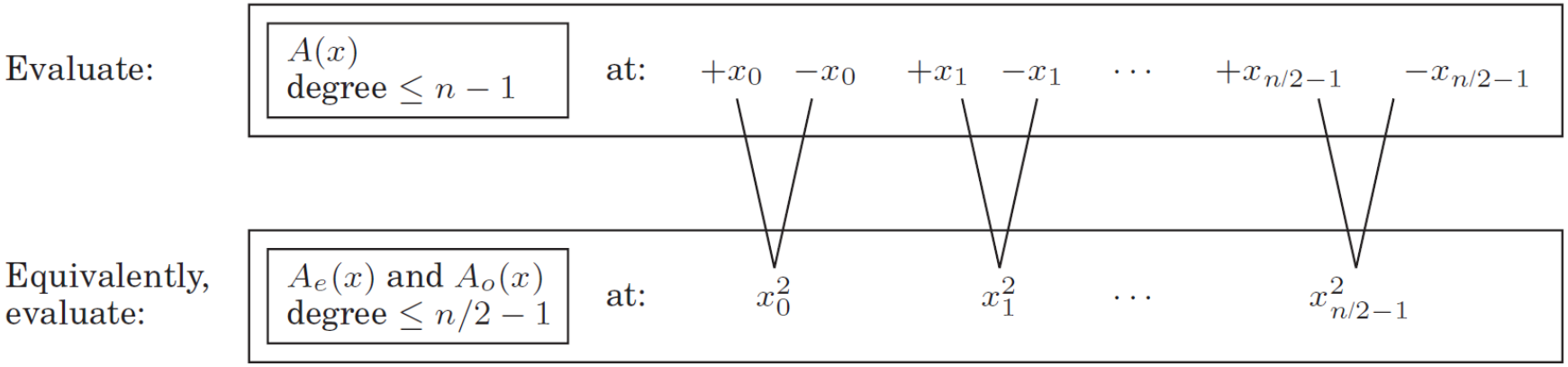
基于$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$， 定义多项式计算函数FFT：

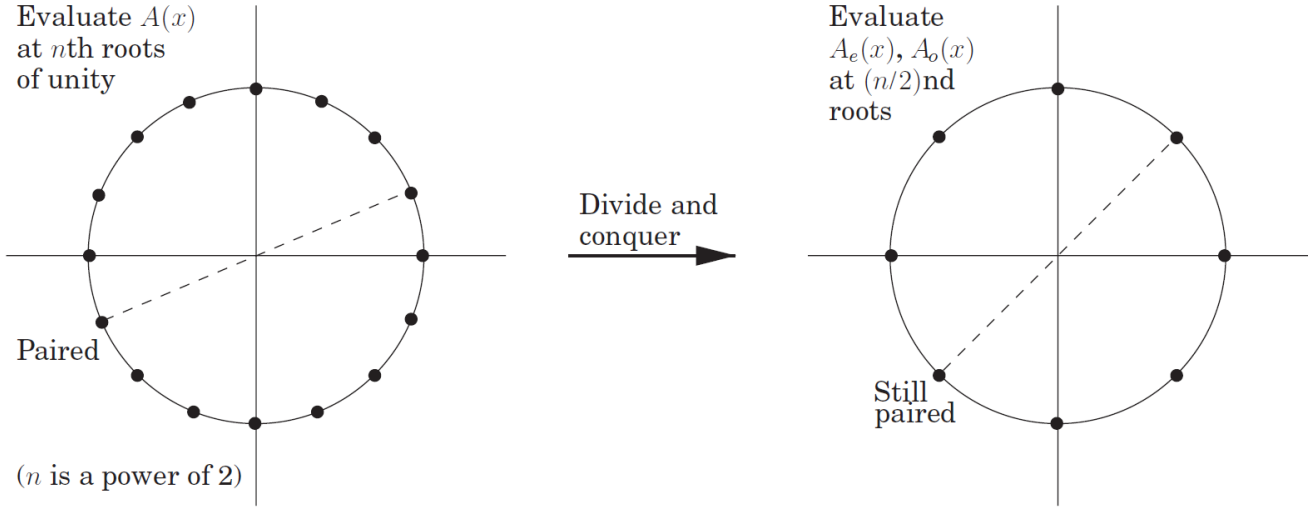
$$\langle values \rangle = FFT(\langle coeff \rangle, \omega)$$

基于$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$， 定义多项式插值函数FFT：

$$\langle coeff \rangle = \frac{1}{n} FFT\left(\langle values \rangle, \omega^{-1}\right)$$

FFT和多项式乘法





function FFT(A, ω)

Input: Coefficient representation of a polynomial $A(x)$ of degree $\leq n-1$, where n is a power of 2
ω, an nth root of unity

Output: Value representation $A(\omega^0), \ldots, A(\omega^{n-1})$

if $\omega = 1$: return $A(1)$
express $A(x)$ in the form $A_e(x^2) + xA_o(x^2)$
call FFT(A_e, ω^2) to evaluate A_e at even powers of ω
call FFT(A_o, ω^2) to evaluate A_o at even powers of ω
for $j = 0$ to $n-1$:
  compute $A(\omega^j) = A_e(\omega^{2j}) + \omega^j A_o(\omega^{2j})$

return $A(\omega^0), \ldots, A(\omega^{n-1})$

FFT的多项式理解

- 一般多项式计算

$$\begin{bmatrix} A(x_0) \\ A(x_1) \\ \vdots \\ A(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

- 多项式插值需要计算逆矩阵
- 基于FFT基的系数矩阵

$$M_n(\omega) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \omega^j & \omega^{2j} & \cdots & \omega^{(n-1)j} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \omega^{(n-1)} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow \omega \\ \leftarrow \omega^2 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \omega^{n-1} \end{array}$$

- 考察$M_n(\omega)$的性质
  - $M_n(\omega)$的列相互正交，可作为一组基（Fourier Basis），有$M_n(\omega)M_n(\omega)^* = nI$
  - 和$M_n(\omega)$相乘相当于对基做了变换
  - $M_n(\omega)$的**逆矩阵**具有如下性质

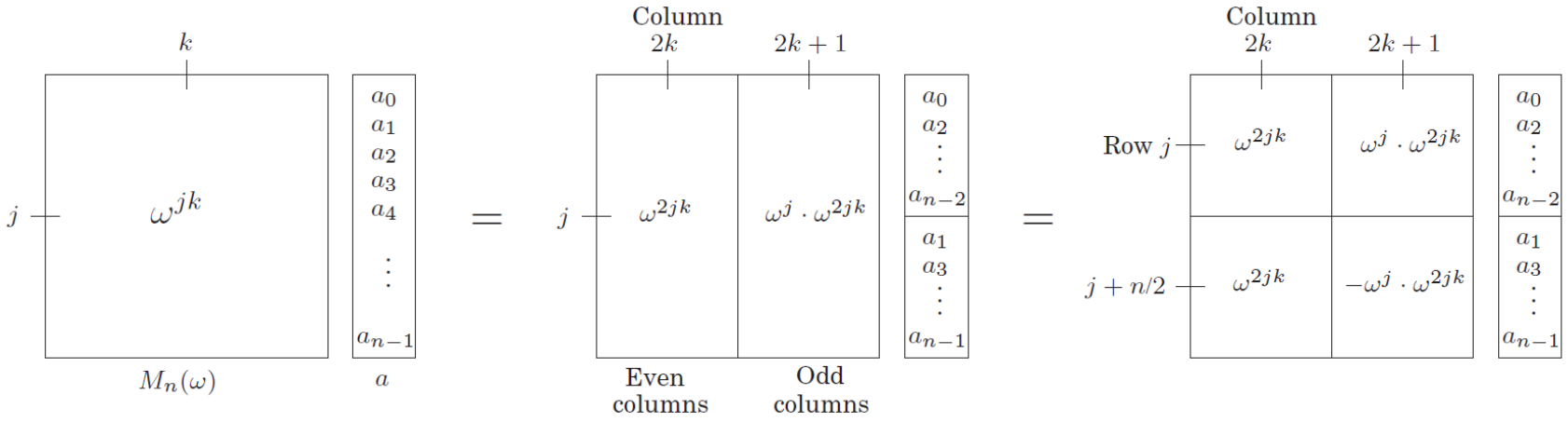
$$M_n(\omega)^{-1} = \frac{1}{n} M_n\left(\omega^{-1}\right)$$

可用于简化FFT的计算

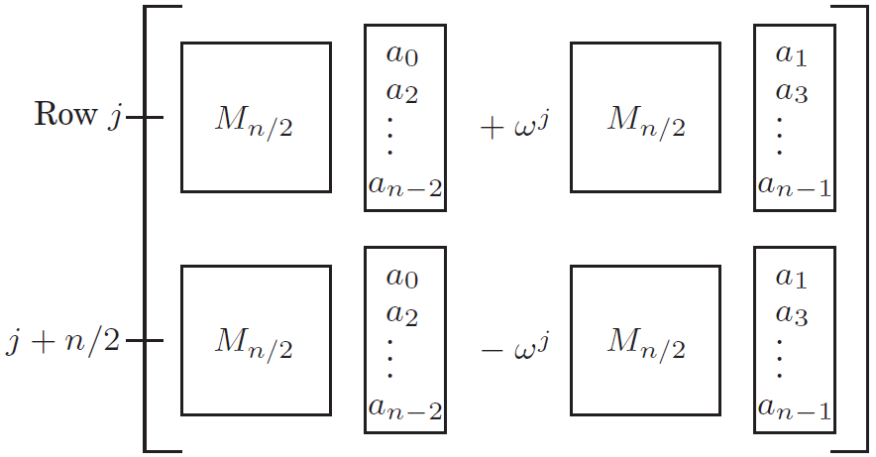
- FFT相当于对向量$a = (a_0, \dots, a_{n-1})$与$M_n(\omega)$做乘法操作

基于矩阵的FFT的分治算法

将矩阵$M_n(\omega)$分解，从而矩阵乘法中可用分治算法



- 和向量$(a_0, \dots, a_{n-1})$的矩阵乘法转化为2个$\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$矩阵乘法
  - $M_{\frac{n}{2}}(\omega^2)$和$(a_0, a_2, \dots, a_{n-2})$ 以及$(a_1, a_3, \dots, a_{n-1})$相乘



FFT算法

- 基于分治思想的FFT算法

function FFT(a, ω)

Input: An array $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, for n a power of 2
  A primitive nth root of unity, ω

Output: $M_n(\omega)\, a$

if $\omega = 1$: return a

$(s_0, s_1, \ldots, s_{n/2-1}) = \mathrm{FFT}((a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}), \omega^2)$

$(s'_0, s'_1, \ldots, s'_{n/2-1}) = \mathrm{FFT}((a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}), \omega^2)$

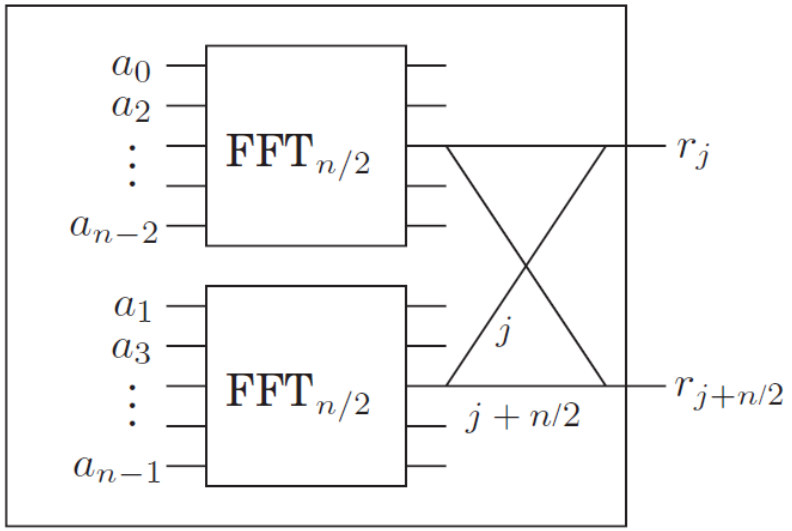
for $j = 0$ to $n/2 - 1$:

  $r_j = s_j + \omega^j s'_j$

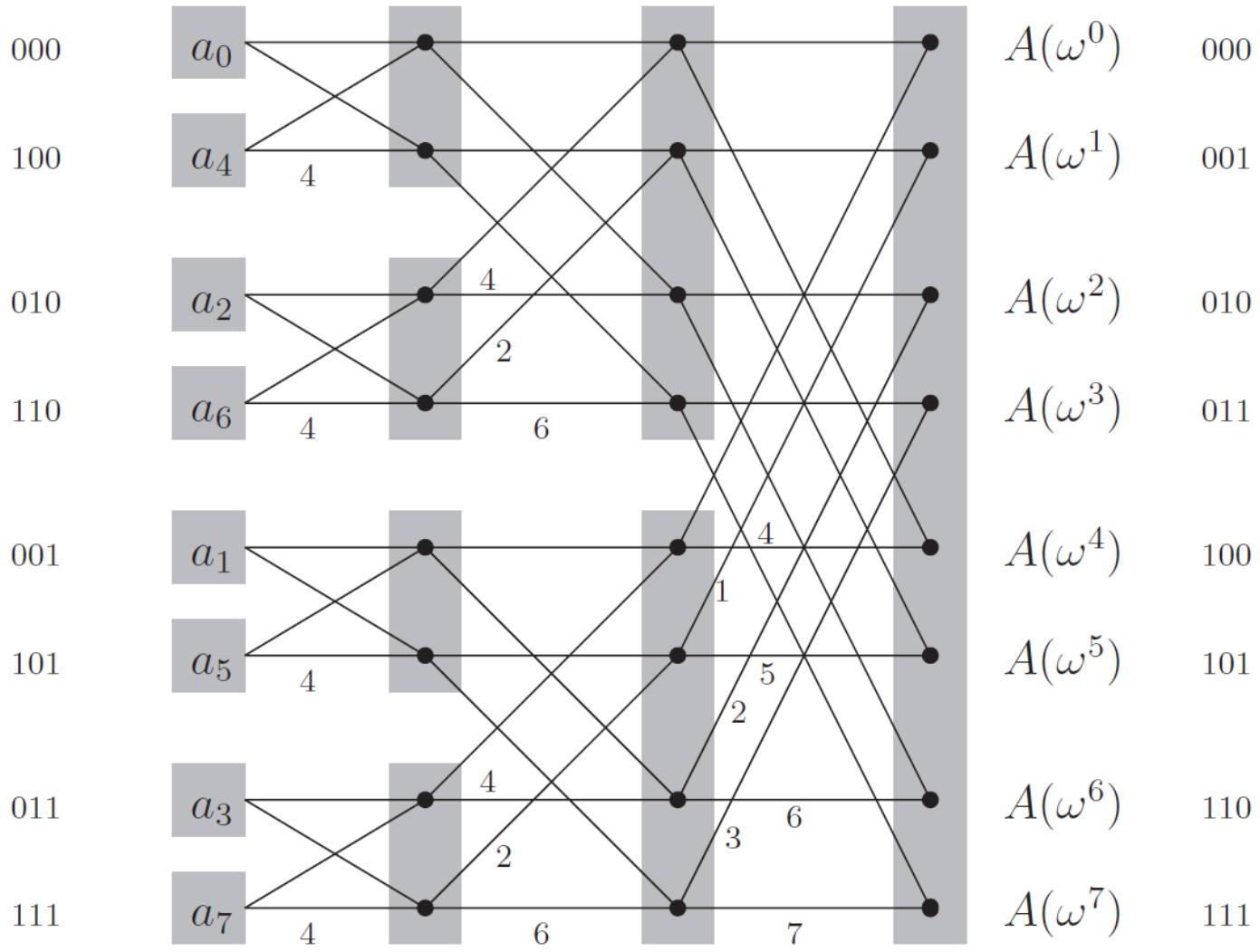
  $r_{j+n/2} = s_j - \omega^j s'_j$

return $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$

FFT_n (input: $a_0, \ldots, a_{n-1}$, output: $r_0, \ldots, r_{n-1}$)



8点FFT示意图


000
100
010
110
001
101
011
111
a_0
a_4
a_2
a_6
a_1
a_5
a_3
a_7
4
4
4
2
4
6
4
1
4
5
2
4
2
6
3
4
6
7
$A(\omega^0)$
$A(\omega^1)$
$A(\omega^2)$
$A(\omega^3)$
$A(\omega^4)$
$A(\omega^5)$
$A(\omega^6)$
$A(\omega^7)$
000
001
010
011
100
101
110
111